UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA

MECÁNICA DE MATERIALES I

LUIS MEDINA
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA

ABRIL 2010

MECÁNICA DE MATERIALES I (MC-2141)

CLASE 1

1. CONTENIDO GENERAL DEL CURSO

   a) CONCEPTOS BÁSICOS: MODELOS DE SISTEMAS DE FUERZAS Y SISTEMAS MATERIALES

   b) EQUILIBRIO ESTÁTICO DE SISTEMAS MECÁNICOS Y ESTRUCTURALES.

   c) ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

   d) ELEMENTOS SOMETIDOS A CARGAS AXIALES

   e) FLEXIÓN DE VIGAS

TEMA 1: CONCEPTOS BÁSICOS

TODO SISTEMA MATERIAL ESTÁ SOMETIDO A LA ACCIÓN DE FUERZAS, QUE PUEDEN SER CAUSADAS POR UN "AGENTE" EXTERNO O COMO PRODUCTO DE INTERACCIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DEL SISTEMA MATERIAL EN ESTUDIO (FUERZAS INTERNAS).

1.1 MODELOS EMPLEADOS PARA REPRESENTAR SISTEMAS MATERIALES

- DE ACUERDO A LA VARIABILIDAD DE "LA FORMA" DEL SISTEMA BAJO UN SISTEMA DE FUERZAS:
  ⓐ RÍGIDOS
  ⓑ DEFORMABLES
- SEGÚN LA COMPOSICIÓN O ESTRUCTURA DEL SISTEMA MATERIAL
  ⓒ CONTINUOS ⇒ INDIVISIBLE
  ⓓ DISCRETOS ⇒ SISTEMA DE PARTÍCULAS

EN GENERAL, LA REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS DEFORMABLES Y CONTINUOS RESULTAN LAS MAS "PRÓXIMAS" A SISTEMAS MATERIALES REALES. NO OBSTANTE, BAJO CIERTAS HIPÓTESIS LOS DEMÁS MODELOS TAMBIÉN PUEDEN EMPLEARSE

1.2 MODELOS PARA REPRESENTAR SISTEMAS DE FUERZAS.

DADO QUE ES SABIDO QUE A LA FUERZA ES ATRIBUIBLE UNA MAGNITUD, DIRECCIÓN Y SENTIDO

CUALQUIER SISTEMA DE FUERZAS
PUEDE SER REPRESENTADO POR
UN SISTEMA DE VECTORES.

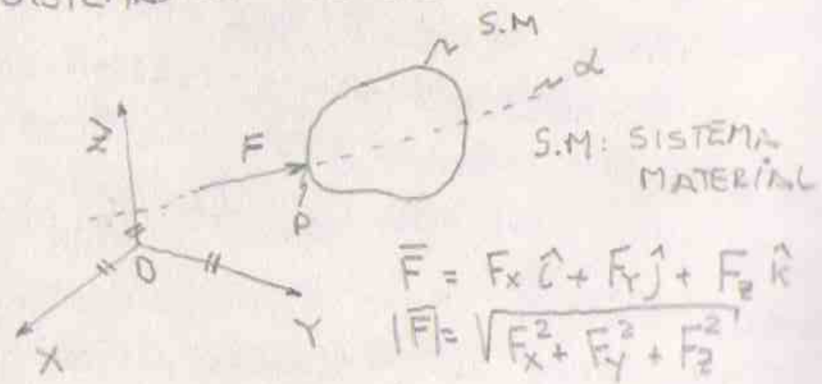
LOS SISTEMAS DE FUERZA (VECTORES)
PUEDEN AGRUPARSE COMO:

ⓐ DISCRETOS ⓒ PUNTUALES

ⓑ CONTINUOS ⓓ DISTRIBUIDOS

EN LA PRIMERA PARTE DEL CURSO SE
ADOPTARÁN LOS MODELOS DE SISTEMA
MATERIAL RÍGIDO Y SISTEMA DE
FUERZAS DISCRETOS. LUEGO SE
CONSIDERAN OTROS MODELOS

2 SISTEMAS DE FUERZAS



$\bar{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

$|\bar{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

SISTEMA DE REFERENCIA
ORTOGONAL: XYZ
(USADO PARA REPRESENTAR
$\bar{F}$)

LA DIRECCIÓN DE $\bar{F}$ VIENE DADA
POR EL VERSOR (VECTOR UNITARIO)

$\hat{e}_F = \frac{\bar{F}}{|\bar{F}|}$

α: RECTA SOPORTE (DIRECCIÓN DE $\bar{F}$)

P: "PUNTO DE APLICACIÓN": ES UNA
IDEALIZACIÓN PARA ASOCIAR $\bar{F}$
SOBRE UN PUNTO EN EL CUERPO
EN ESTUDIO (S.M)

OBSERVE QUE SI EL S.M ES <u>RÍGIDO</u>
$\bar{F}$ PUEDE "ASOCIARSE" A CUALQUIER
$P \in \alpha$. (ES DECIR, NO IMPORTA EL
EFECTO "LOCAL" DE $\bar{F}$ SOBRE EL
CUERPO SINO EL EFECTO "NETO")

LA FUERZA (EN ESTE CASO) ES
REPRESENTADA COMO UN <u>VECTOR</u>
<u>DESLIZANTE</u>.

- MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO
A UN PUNTO:
CUANTIFICA LA "TENDENCIA" (EFECTIVA
O APARENTE) DE UN SISTEMA DE
FUERZAS A CAUSAR ROTACIÓN
DEL S.M RESPECTO A UN PUNTO

EN UNA DIRECCIÓN (EJE) DETERMINADO

POR EJEMPLO, EL MOMENTO DE $\overline{F}$ RESPECTO A "O" ES:

$$\overline{M}_O = \overline{OP} \times \overline{F}$$

O: CENTRO DE MOMENTO

$P \in \alpha$ (RECTA SOPORTE DE $\overline{F}$)

OBSERVAR QUE SI $Q \in \alpha$ ENTONCES:

$$\overline{M}_O = \overline{OQ} \times \overline{F}$$

$$= (\overline{OP} + \overline{PQ}) \times \overline{F}$$

$$= \overline{OP} \times \overline{F}$$ (YA QUE $\overline{PQ} \times \overline{F} \equiv \overline{O}$ POR SER VECTORES PARALELOS)

LO ANTERIOR RATIFICA QUE $\overline{F}$ ES UN VECTOR DESLIZANTE. SIN EMBARGO, $\overline{M}_O$ DEPENDE DEL CENTRO DE MOMENTO ($\overline{M}_O$ ES UN VECTOR FIJO, YA QUE DEPENDE DEL PUNTO O SELECCIONADO)

- MOMENTO RESPECTO A UN EJE

OBSERVAR QUE, EN GENERAL, EN EL SISTEMA XYZ:

$$\overline{M}_O = M_{OX}\,\hat{i} + M_{OY}\,\hat{j} + M_{OZ}\,\hat{k}$$

DONDE:

$M_{OX} = \overline{M}_O \cdot \hat{i}$ ES EL MOMENTO GENERADO POR $\overline{F}$ RESPECTO AL EJE X (NOTE QUE $O \in X$), ASI TAMBIÉN SE TIENE:

$$M_{OY} = \overline{M}_O \cdot \hat{j}$$

$$M_{OZ} = \overline{M}_O \cdot \hat{k}$$

REPECTO A CUALQUIER EJE:

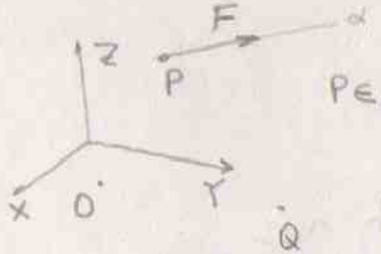
$$M_{O_e} = \overline{M}_O \cdot \hat{e}$$

DONDE $O \in$ AL EJE CUYO VERSOR ES DADO POR $\hat{e}$.

NOTE QUE SI SE CONOCE, ADEMÁS DE O, OTRO PUNTO P TAL QUE PERTENEZCA AL EJE, ENTONCES

$$\hat{e} = \frac{\overline{OP}}{|\overline{OP}|}$$

- MOMENTO RESPECTO A UN PUNTO Q COMO FUNCIÓN DE $\overline{M}_O$



$P \in \alpha$

$\overline{M}_O = \overline{OP} \times \overline{F}$

$\overline{M}_Q = \overline{QP} \times \overline{F}$

SÍ $\overline{M}_O$ ES CONOCIDO, PUEDE CALCULARSE TAMBIÉN $\overline{M}_Q$ COMO:

$$\overline{M}_Q = (\overline{QO} + \overline{OP}) \times \overline{F}$$
$$= \overline{QO} \times \overline{F} + \overline{OP} \times \overline{F}$$
$$\boxed{\overline{M}_Q = \overline{M}_O + \overline{QO} \times \overline{F}}$$

OBSERVE QUE SÍ SE REQUIERE HALLAR EL MOMENTO RESPECTO AL EJE QUE PASA POR OQ SE TIENE QUE:

$$M_{\hat{e}_{OQ}} = \overline{M}_O \cdot \hat{e}_{OQ} \text{ , CON } \hat{e} = \frac{\overline{OQ}}{|\overline{OQ}|}$$

PERO TAMBIÉN PUDO HALLARSE COMO:

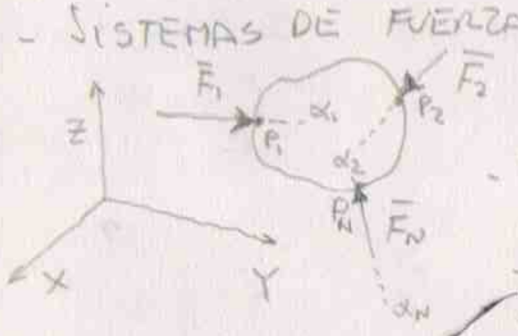
$$M_{\hat{e}_{OQ}} = \overline{M}_Q \cdot \hat{e}_{OQ} \text{ , YA QUE}$$

$Q \in OQ$

DE HECHO, SABIENDO QUE:

$$\overline{M}_Q = \overline{M}_O + \overline{QO} \times \overline{F}$$
$$i = \overline{M}_Q \cdot \hat{e}_{QO} = \overline{M}_O \cdot \hat{e}_{QO} \text{ , YA QUE}$$
$$(\overline{QO} \times \overline{F}) \cdot \hat{e}_{QO} \equiv 0 \text{ DADO QUE}$$
$$\overline{QO} \times \overline{F} \perp \hat{e}_{QO}.$$

- SISTEMAS DE FUERZAS DISCRETOS



SE DEFINEN:

- RESULTANTE DE FUERZAS:

$$\overline{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i$$

- RESULTANTE DE MOMENTOS RESPECTO A UN PUNTO "O" CUALQUIERA

$$\overline{M}_O = \sum (\overline{OP}_i \times \overline{F}_i)$$

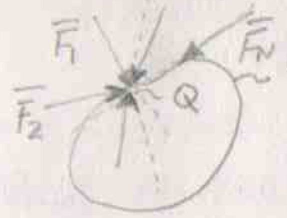
NOTE QUE PARA OTRO CENTRO DE MOMENTO Q:

$$\overline{M}_Q = \sum_{i=1}^{N} (\overline{QP}_i \times \overline{F}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\overline{QO} + \overline{OP}_i) \times \overline{F}_i$$
$$\overline{M}_Q = \sum_{i=1}^{N} \overline{QO} \times \overline{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \overline{OP}_i \times \overline{F}_i$$
$$\overline{M}_Q = \overline{QO} \times \overline{F}_R + \overline{M}_O$$

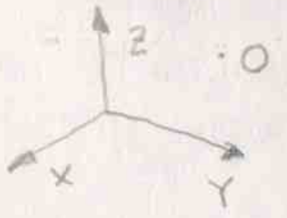
ALGUNOS SISTEMAS DE FUERZAS TÍPICOS:

a) SISTEMA NULO: $\overline{F}_R = \overline{0}$ Y $\overline{M}_O \equiv \overline{0}$
PARA CUALQUIER O

b) CONCURRENTES:



⇒ LAS LÍNEAS DE ACCIÓN O RECTAS SOPORTES "CORTAN" EN PUNTO COMÚN Q



·O

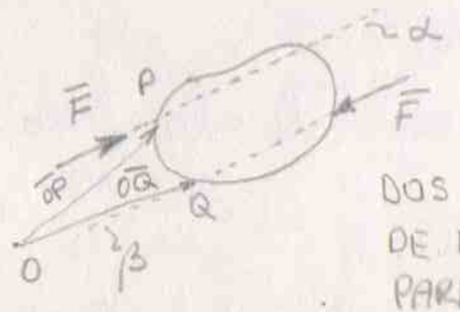
LUEGO:

$$\overline{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i$$

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \overline{OQ} \times \overline{F}_i$$

$$\overline{M}_O = \overline{OQ} \times \overline{F}_R$$

c) PAR DE FUERZAS:



$P \in \alpha$
$Q \in \beta$ $\alpha \parallel \beta$

DOS FUERZAS DE IGUAL MAGNITUD, PARALELAS, PERO SENTIDO OPUESTO

ES CLARO QUE $\overline{F}_R = \overline{F} + (-\overline{F}) = \overline{0}$

PERO EL MOMENTO RESULTANTE RESPECTO A CUALQUIER PUNTO ES:

$$\overline{M}_O = \overline{OP} \times \overline{F} + \overline{OQ} \times (-\overline{F})$$
$$= (\overline{OP} - \overline{OQ}) \times \overline{F}$$
$$\overline{M}_O = \overline{QP} \times \overline{F}$$

DE FORMA QUE EL PAR DE FUERZAS, AUNQUE NO PRODUCE UNA FUERZA RESULTANTE, ES EQUIVALENTE A UN MOMENTO QUE <u>NO DEPENDE</u> DEL CENTRO DE MOMENTO CONSIDERADO.

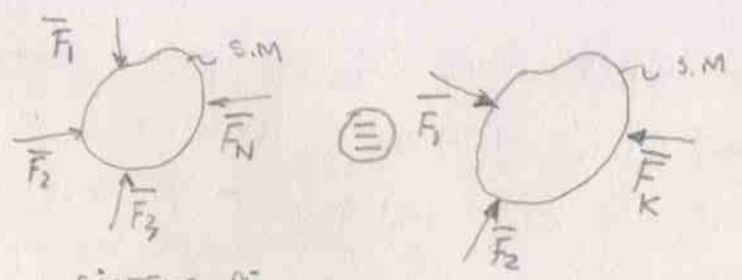
NOTE QUE SI SE TOMA OTRO PUNTO "S" CUALQUIERA:

$$\overline{M}_S = \overline{M}_O + \overline{SO} \times \overline{F}_R$$

(POR RELACIÓN YA DEMOSTRADA)
PERO $\overline{F}_R \equiv \overline{0}$ ASÍ $\overline{M}_S \equiv \overline{M}_O$

- EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS DE FUERZAS:

DOS SISTEMAS DE FUERZA SON EQUIVALENTES SI CUMPLEN



SISTEMA DE FUERZAS 1 — SISTEMA DE FUERZAS 2

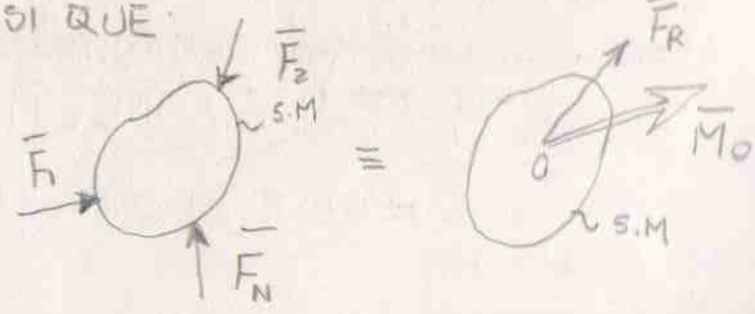
(1) $(\overline{F}_R)_1 = \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i \equiv (\overline{F}_R)_2 = \sum_{i=1}^{K} \overline{F}_K$

(2) $(\overline{M}_O)_1 = \sum_{i=1}^{N} \overline{OP}_i \times \overline{F}_i \equiv (\overline{M}_O)_2 = \sum_{i=1}^{K} \overline{OP}_i \times \overline{F}_i$

AMBAS CONDICIONES DEBEN CUMPLIRSE

EN GENERAL, CUALQUIER SISTEMA DE FUERZAS PUEDE REDUCIRSE A UN SIMPLE SISTEMA FORMADO POR UNA FUERZA (RESULTANTE) Y UN MOMENTO (O PAR DE FUERZAS)

ASI QUE



S_1 — S_2

EL SISTEMA S_2 ES EQUIVALENTE A S_1 SI:

$$\overline{F}_R = \sum_{i=1}^{N} F_i \quad (1)$$

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \overline{OP}_i \times \overline{F}_i \quad (2)$$

AL SUSTITUIR S_1 POR LOS EQUIVALENTES $\overline{F}_R$ Y $\overline{M}_O$ SE DICE QUE S_2 ES EL SISTEMA FUERZA-PAR EQUIVALENTE REDUCIDO EN EL PUNTO "O".

CLASE 2

SE SABE QUE CUALQUIER SISTEMA DE FUERZAS PUEDE SER REDUCIDO ("EQUIVALENTE A") UN SISTEMA MAS SIMPLE FORMADO POR UNA FUERZA (RESULTANTE) Y UN MOMENTO (PAR) EN UN DETERMINADO PUNTO.

¿ES POSIBLE REDUCIR A UN SISTEMA MAS SIMPLE FORMADO, POR EJEMPLO, POR UNA SOLA FUERZA?

SI ES POSIBLE SI SE SATISFACE UNA PARTICULAR CONDICIÓN. ANTES DE PRESENTAR ESTA CONDICIÓN

VEAMOS CASOS PARTICULARES EN LOS QUE ESTA REDUCCIÓN ES POSIBLE.

- CASO (a): SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES

P: PUNTO DE CONCURRENCIA

(S2) ES EQUIVALENTE A (S1) SI:

$$\overline{F_R} = \left(\sum_{i=1}^{N} \overline{F_i}\right)_{S_1}$$

LA OTRA CONDICIÓN SE CUMPLE EN CUALQUIER PUNTO, ES DECIR PARA S_1:

$$\overline{M_O} = \overline{OP} \times \overline{F_R} + \cancel{\overline{M_P}}$$

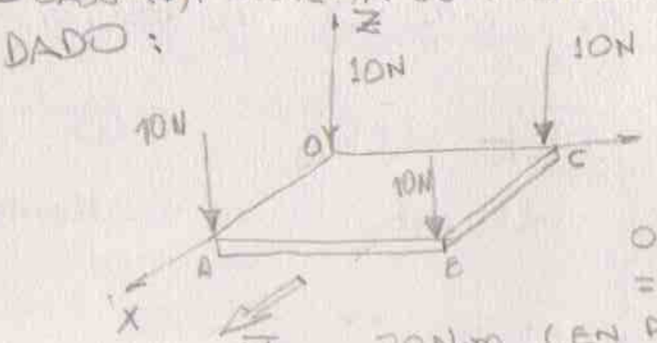
$\overline{0}$ (YA QUE "P" ES UN PUNTO DE CONCURRENCIA PARA EL SISTEMA DE FUERZAS)

PARA S2:

$$M_O = \overline{OP} \times \overline{F_R}$$

NOTE QUE O ES "CUALQUIER PUNTO"

- CASO (b): SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS DADO:



OA = AB = BC = OC = 1 m

$\overline{M}_{PAR}$ = 20 N·m (EN DIRECCIÓN X)

OBSERVE QUE $\overline{M}_{PAR}$ ES UN MOMENTO GENERADO POR UN PAR DE FUERZAS PARALELO AL RESTO DEL SISTEMA DE FUERZAS

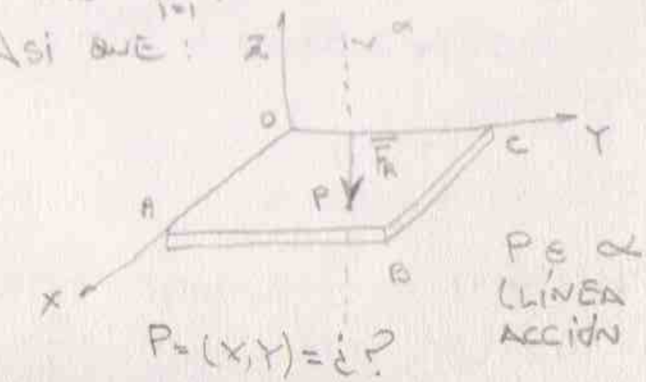
OBTENGA EL SISTEMA DE FUERZA EQUIVALENTE MÁS SIMPLE POSIBLE.

SOLUCIÓN:

SABIENDO QUE ESTE SISTEMA SE PUEDE REDUCIR A UNA SOLA FUERZA, SE TIENE QUE:

$$\overline{F_R} = \sum_{i=1}^{4} \overline{F_i} = -40\ \hat{k}\ [N] \quad \ldots ①$$

ASÍ QUE:



P ∈ α (LÍNEA DE ACCIÓN DE $\overline{F_R}$)

P = (X,Y) = ¿?

PARA OBTENER LA EQUIVALENCIA ENTRE AMBOS SISTEMAS SE REQUIERE TAMBIÉN QUE:

$$(\overline{M_O})_{S_1} = (\overline{M_O})_{S_2} \quad \ldots \quad (2)$$

(CON "O" DEFINIDO COMO CUALQUIER PUNTO)

PARA S_1: $\overline{M_O} = \overline{OA} \times (-10\hat{k}) + \overline{OC} \times (-10\hat{k}) + (\overline{OA} + \overline{AB}) \times (-10\hat{k}) + 20\hat{i}$

$$\overline{M_O} = 1\hat{i} \times (-10\hat{k}) + 1\hat{j} \times (-10\hat{k}) + (\hat{i}+\hat{j}) \times (-10\hat{k}) + 20\hat{i}$$

$$\overline{M_O} = (-10-10+20)\hat{i} + (10+10)\hat{j}$$

$$\overline{M_O} = 20\hat{j} \quad [N \cdot m]$$

PARA S_2: $\overline{M_O} = \overline{OP} \times \overline{F_R}$, PERO $P = (X, Y)$

ASÍ $\overline{M_O} = (X\hat{i} + Y\hat{j}) \times (-40\hat{k})$

$$\overline{M_O} = -40Y\hat{i} + 40X\hat{j}$$

SEGÚN (2):

$$20\hat{j} = -40Y\hat{i} + 40X\hat{j}$$

$$\therefore Y = 0$$

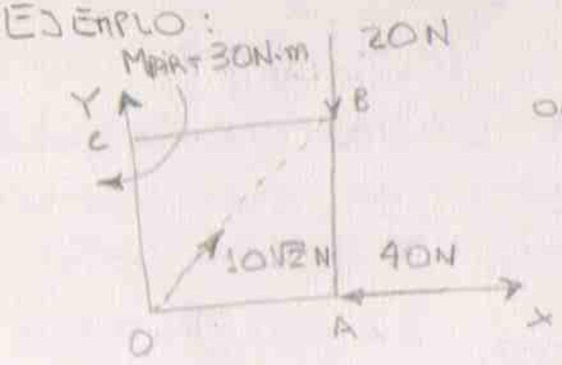
$$X = \frac{1}{2}$$

ASÍ EL SISTEMA FORMADO POR $F = -40\hat{k}$ [N] CUYA LÍNEA DE

ACCIÓN PASA POR $X = 1/2$ m, $Y = 0$, $Z = 0$ m, ES EQUIVALENTE AL SISTEMA DADO

- CASO (2): SISTEMA DE FUERZAS COPLANARES.

EJEMPLO:



OA = AB = CB = CO = 1 m

NOTE QUE MPAR DEBE SER GENERADO POR PAR DE FUERZAS CONTENIDA EN PLANO XY ($Z = 0$).

IGUAL QUE EL CASO ANTERIOR, IMPONIENDO LAS CONDICIONES DE EQUIVALENCIA:

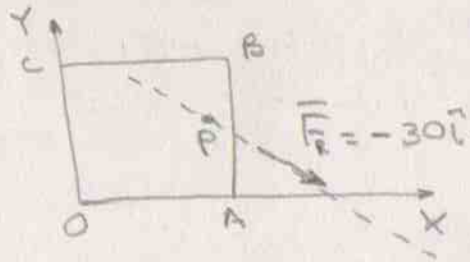
LA MAGNITUD DE LA ÚNICA FUERZA EQUIVALENTE ES:

$$\overline{F_R} = -40\hat{i} - 20\hat{j} + 10\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)$$

$$\overline{F_R} = (-40+10)\hat{i} + (10-20)\hat{j}$$

$$\overline{F_R} = -30\hat{i} - 10\hat{j} \quad [N]$$

DE MODO QUE HASTA AHORA SE TIENE.



$P \in \alpha$, $P = (x, y) = ¿?$

PARA QUE EXISTA EQUIVALENCIA TOTAL:

$$(\overline{M}_O)_{S_1} = (\overline{M}_O)_{S_2}$$

$$(\overline{M}_O)_{S_1} = \overline{OA} \times (-20\hat{j}) - 30\hat{k}$$
$$= \hat{i} \times (-20\hat{j}) - 30\hat{k}$$
$$= (-20-30)\hat{k} = -50\hat{k}$$

$$(\overline{M}_O)_{S_2} = \overline{OP} \times \overline{F}_R$$
$$= (x\hat{i} + y\hat{j}) \times (-30\hat{i} - 10\hat{j})$$
$$= (-10x + 30y)\hat{k}$$

Así:

$$-50\hat{k} = (-10x + 30y)\hat{k}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

LA FUERZA $F = -30\hat{i} - 10\hat{j}$ CUYA LÍNEA DE ACCIÓN VENGA DADA POR

LA RECTA $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ ES EQUIVALENTE AL SISTEMA DE FUERZAS DADO.

- CONDICIÓN QUE DEBE SATISFACERSE PARA REDUCIR UN SISTEMA DE FUERZAS CUALQUIERA A UNA ÚNICA FUERZA:

$$\overline{F}_R \perp \overline{M}_P$$

(LA FUERZA RESULTANTE DEBE SER PERPENDICULAR AL MOMENTO <u>RESULTANTE</u> (TOTAL) RESPECTO A CUALQUIER PUNTO P.

NOTE QUE SI $\overline{F}_R \perp \overline{M}_P$ PARA OTRO PUNTO Q SE SABE:

$$\overline{M}_Q = \overline{QP} \times \overline{F}_R + \overline{M}_P$$

$$\overline{F}_R \cdot \overline{M}_Q = \underbrace{\overline{F}_R \cdot (\overline{QP} \times \overline{F}_R)}_{0} + \underbrace{\overline{F}_R \cdot \overline{M}_P}_{0}$$

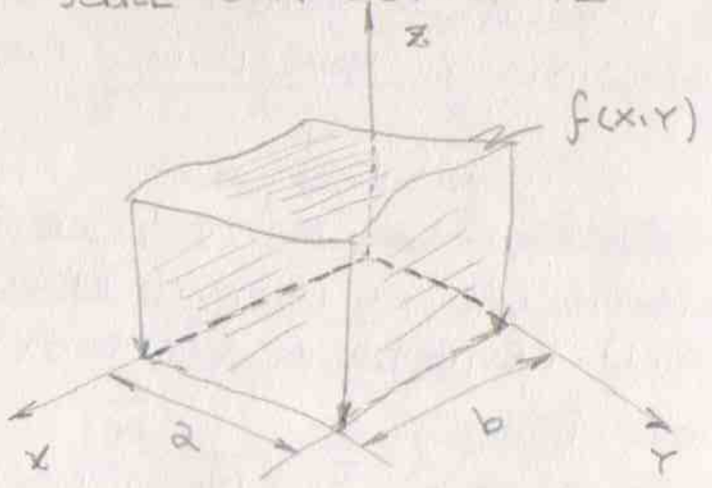
$$\overline{F}_R \cdot \overline{M}_Q = 0 \quad \text{ASÍ } \overline{F}_R \perp \overline{M}_Q$$

(SI $\overline{M}_Q \neq 0$).

LAS CONDICIONES DE EQUIVALENCIA PUEDEN EXTENDERSE PARA SISTEMAS (DE FUERZAS) DISTRIBUIDOS.

- SISTEMAS DE FUERZAS DISTRIBUIDOS

- (1) PARA UN SISTEMA DE FUERZA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO SOBRE UNA SUPERFICIE

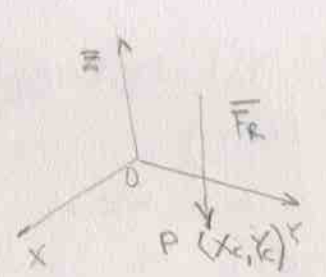


$f(x,y)$: INTENSIDAD DEL "CAMPO" DE FUERZA [FUERZA/ÁREA]

EN ESTE CASO:

$$\overline{F}_R = \iint_A f(x,y)\,dA = \int_0^a\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy$$

OBSERVE QUE SE TRATA DE UN SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS ASÍ QUE ES "REDUCIBLE" A UNA SOLA FUERZA



PARA FORMULAR LA EQUIVALENCIA DE MOMENTO:

PARA EL SISTEMA ORIGINAL:

$$d\overline{M}_0 = (x\hat{i} + y\hat{j}) \times d\overline{F}$$

$$d\overline{F} = -f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{k}$$

$$d\overline{M}_0 = -(x\hat{i} + y\hat{j}) \times f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{k}$$

$$d\overline{M}_0 = -y f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{i} - x f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{j}$$

$$\overline{M}_0 = -\int_0^a\int_0^b y f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{i} - \int_0^a\int_0^b x f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{j}$$

PARA EL SISTEMA O FUERZA EQUIVALENTE

$$\overline{M}_0 = (x_c\hat{i} + y_c\hat{j}) \times \overline{F}_R$$

$$= x_c\hat{i} + y_c\hat{j} \times \left[-\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{k}\right]$$

$$= -y_c\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{i} - x_c\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy\,\hat{j}$$

IGUALANDO, RESULTA:

$$x_c = \frac{\int_0^a\int_0^b x f(x,y)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy}$$

$$y_c = \frac{\int_0^a\int_0^b y f(x,y)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,dx\,dy}$$

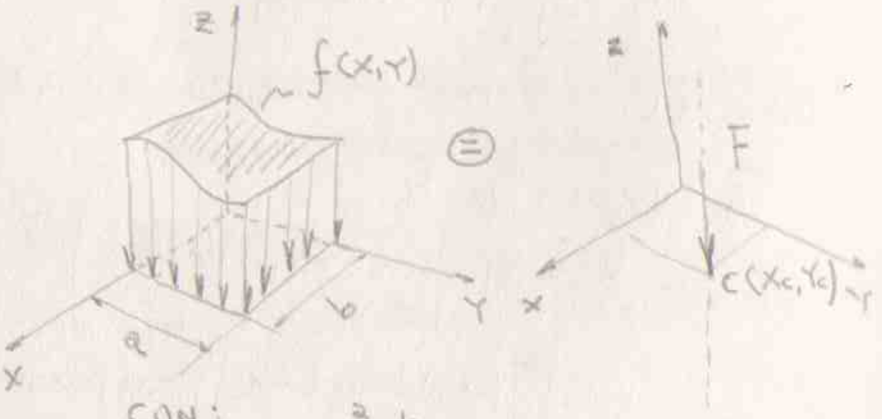
LAS COORDENADAS (X_c, Y_c) DEPENDEN DE LA DISTRIBUCIÓN $f(x,y)$.

EL SISTEMA SE REDUCE A UNA FUERZA RESULTANTE CUYA LÍNEA DE ACCIÓN PASA POR EL PUNTO (X_c, Y_c) DENOMINADO CENTRO GEOMÉTRICO O CENTROIDE

CLASE 3

REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS DISTRIBUIDAS

SE SABE QUE ES POSIBLE OBTENER LA EQUIVALENCIA:



CON:

$$F = \int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dx\,dy$$

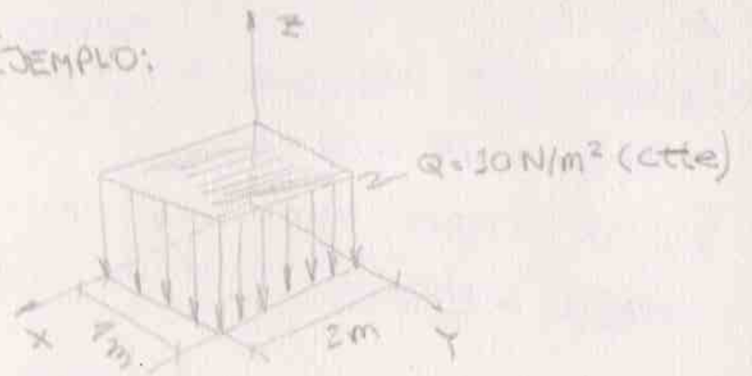
$$X_c = \int_0^a \int_0^b x\, f(x,y)\,dx\,dy \Big/ F$$

$$Y_c = \int_0^a \int_0^b y\, f(x,y)\,dx\,dy \Big/ F$$

LA FUERZA F CUYA LÍNEA DE ACCIÓN PASA POR $C(X_c, Y_c)$ ES EQUIVALENTE AL SISTEMA DE FUERZAS DISTRIBUIDO SOBRE LA SUPERFICIE $a \times b$

- NOTE QUE LA MAGNITUD DE F ES EL "VOLUMEN" DEFINIDO POR EL SISTEMA DISTRIBUIDO APLICADO SOBRE EL ÁREA $a \times b$

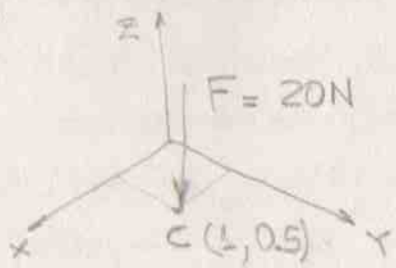
EJEMPLO:



$$F = \int_0^1 \int_0^2 Q\,dx\,dy = V = 10\,(2)(1) = 20\ \text{N}$$

LA LÍNEA DE ACCIÓN DE $\overline{F}$ PUEDE UBICARSE EXAMINANDO SI EL SISTEMA POSEE UNO (O VARIOS) EJES DE SIMETRÍA, DE ESTE MODO SE SIMPLIFICA (PARCIAL O TOTALMENTE) EL CÁLCULO EXPLÍCITO DE X_c O Y_c.

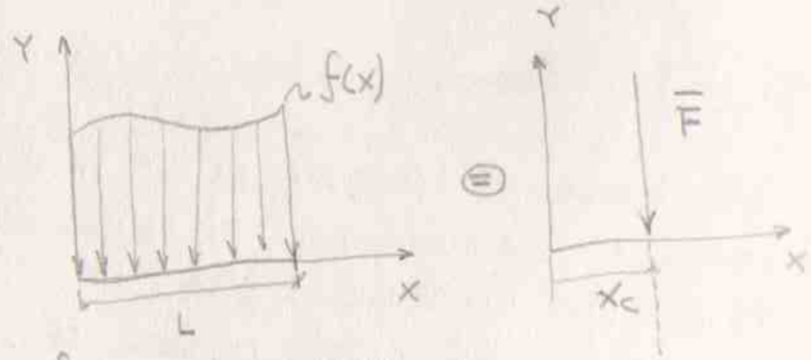
PARA ESTE EJEMPLO, ES CLARO QUE:



ESTO PUEDE COMPROBARSE EVALUANDO LAS EXPRESIONES DEFINIDAS PARA X_c Y Y_c.

- SISTEMA DE FUERZAS DISTRIBUIDO SOBRE "UNA LÍNEA".

ES UN CASO PARTICULAR DEL MODELO ANTERIOR:



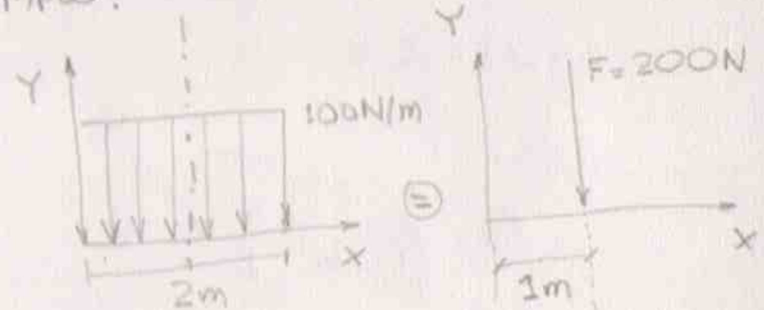
$f(x)$: INTENSIDAD DEL CAMPO [FUERZA/LONGITUD]

EL SISTEMA REDUCIDO A UNA

SOLA FUERZA ES DADO POR:

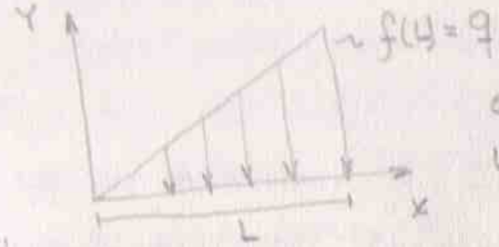
$$F = \int_0^L f(x)\,dx \quad Y \quad X_c = \frac{\int_0^L x f(x)\,dx}{F}$$

OBSERVE QUE LA MAGNITUD DE $\bar{F}$ ES EL "ÁREA" BAJO LA DISTRIBUCIÓN DADA POR $f(x)$. DE IGUAL FORMA, SI EXISTE SIMETRÍA ES POSIBLE EVITAR EL CÁLCULO DE X_c, POR EJEMPLO:



EJE DE SIMETRÍA

AHORA, SI SE TIENE UN SISTEMA DE FUERZAS COMO:



CON q Y L DADOS

¿CUÁL ES LA FUERZA EQUIVALENTE?

SU MAGNITUD ES DADA POR EL ÁREA BAJO $f(x)$, ESTO ES:

$$F = \frac{qL}{2}$$

¿EXISTE ALGÚN EJE DE SIMETRÍA?

NO; EN ESTE CASO DEBE EVALUARSE:

$$x_c = \frac{\int_0^L x f(x)\,dx}{F}, \quad \text{SIENDO } f(x):$$

$$f(x) = \frac{q}{L}x$$

LUEGO:

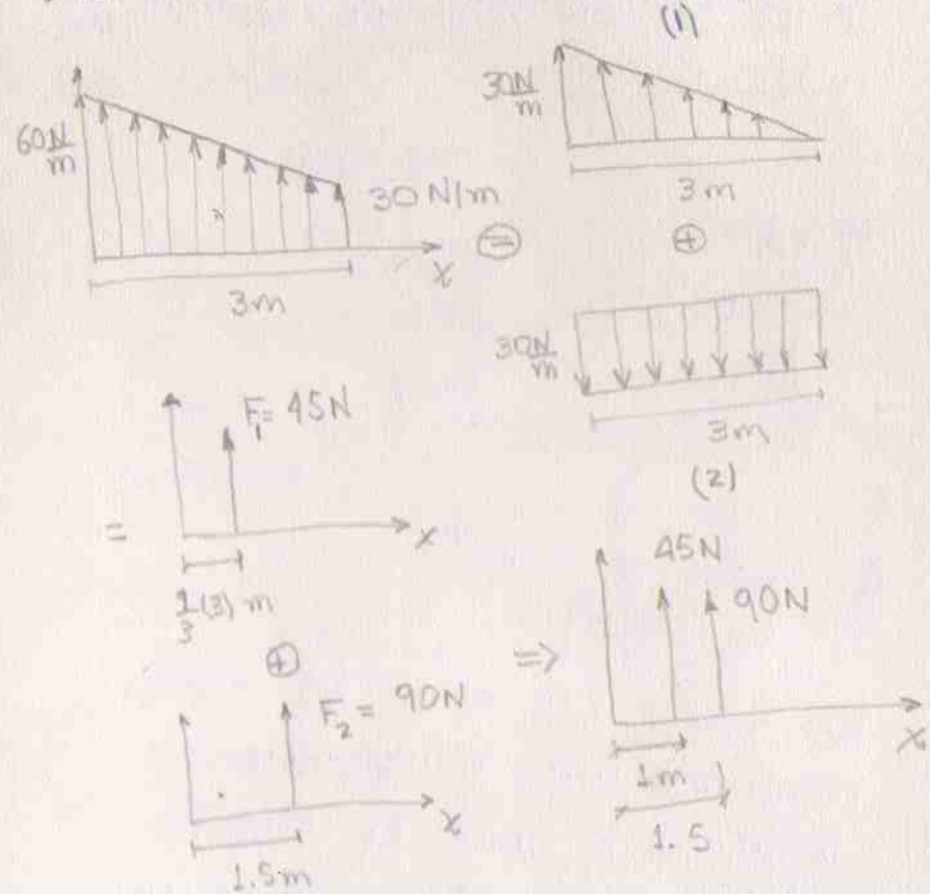
$$x_c = \frac{2}{qL}\int_0^L x \frac{q}{L} x \, dx$$

$$x_c = \frac{2}{L^2}\int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L$$

$$x_c = \frac{2}{3}L$$

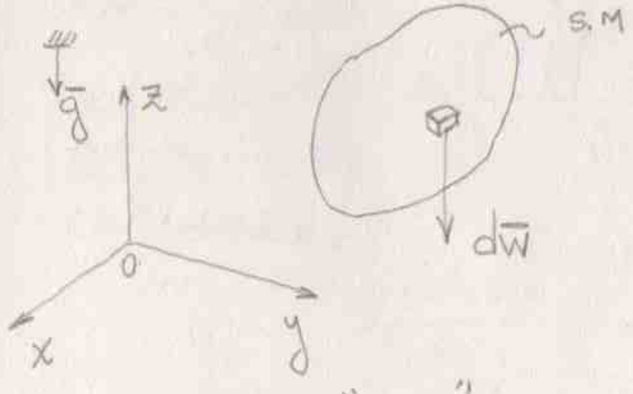
EN LA PRÁCTICA, LAS FUERZAS DISTRIBUIDAS SUELEN SER DE INTENSIDAD CONSTANTE O VARIABLE LINEALMENTE. PUEDE APLICARSE PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN PARA "REDUCIR" ALGUNAS FUERZAS

DISTRIBUIDAS. EJEMPLO:



AUNQUE ES POSIBLE REDUCIR A UNA SOLA FUERZA, PUEDE RESULTAR MAS CONVENIENTE (ESTO ES: PRÁCTICO, SIMPLE) EXPRESAR DICHO SISTEMA COMO 2 FUERZAS EQUIVALENTES (SALVO QUE SE REQUIERA LA REDUCCIÓN A UNA SOLA FUERZA).

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SISTEMA MATERIAL



$\bar{g}$: VECTOR DE "CAMPO" GRAVITATORIO

LA ACCIÓN DEL CAMPO DE FUERZAS (ASUMIDO COMO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO) SOBRE EL CUERPO RÍGIDO PUEDE REDUCIRSE A UN ÚNICO PUNTO :

$$W = \int_W dW \quad \text{(PESO DEL CUERPO)}$$

CUYA LÍNEA DE ACCIÓN "CONTIENE" A $G(X_G, Y_G, Z_G)$

$$X_G = \frac{\int x\,dW}{\int dW} \; ; \; Y_G = \frac{\int Y\,dW}{\int dW} \; ; \; Z_G = \frac{\int Z\,dW}{\int dW}$$

EN TÉRMINOS DEL PESO ESPECÍFICO DEL CUERPO :

$$dW = \gamma\, dV$$

$W = \int \gamma\, dV$; SI SE CONSIDERA UN CUERPO HOMOGÉNEO (DENSIDAD CONSTANTE) Y $|\bar{g}|$ = CONSTANTE ENTONCES :

$$W = \gamma \int_V dV \quad , \quad \gamma = \rho \cdot g$$

$$X_C = \frac{\int_V X\,dV}{V} \, , \quad Y_C = \frac{\int_V Y\,dV}{V} \, ,$$

$$Z_C = \frac{\int_V Z\,dV}{V}$$

LAS COORDENADAS $C = (X_C, Y_C, Z_C)$ DEFINEN UN PUNTO QUE DEPENDE DE LA GEOMETRÍA DEL CUERPO.

C ES EL CENTROIDE DEL CUERPO.

SI EL CUERPO ES UNA PLACA DE ESPESOR t CONSTANTE, PUEDE ESCRIBIRSE : $dV = t \cdot dA$

RESULTANDO :

$$X_c = \frac{\int_A x\,dA}{A} ;\ Y_c = \frac{\int y\,dA}{A},\ Z_c = \frac{\int z\,dA}{A}$$

(CENTROIDE DE ÁREA)

SI SE TIENE UN CUERPO CON SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE ($A = ctte$) LAS COORDENADAS DE C REPRESENTAN EL CENTROIDE DE LÍNEA :

$$dV = A \cdot dL \quad , \quad A = ctte$$

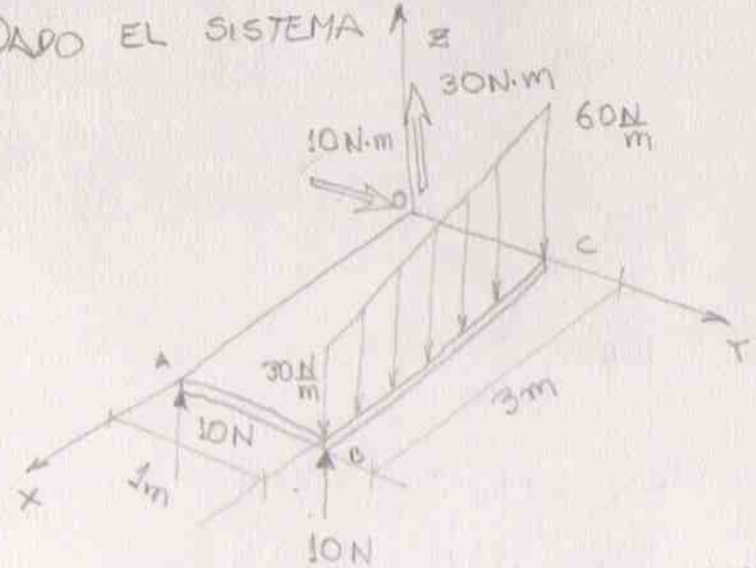
$$X_c = \frac{\int x\,dL}{L},\ Y_c = \frac{\int y\,dL}{L},\ Z_c = \frac{\int z\,dL}{L}$$

EN CUALQUIER CASO, ES IMPORTANTE TENER PRESENTE QUE LA SIMETRÍA DEL CUERPO (EN CASO DE HABERLA) PUEDE SIMPLIFICAR EL CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DE C (ESTE PUNTO ESTARÁ EN EL EJE DE SIMETRÍA O EN LA INTERSECCIÓN EN CASO DE POSEER MÁS DE UN EJE

DE SIMETRÍA

CLASE 4:

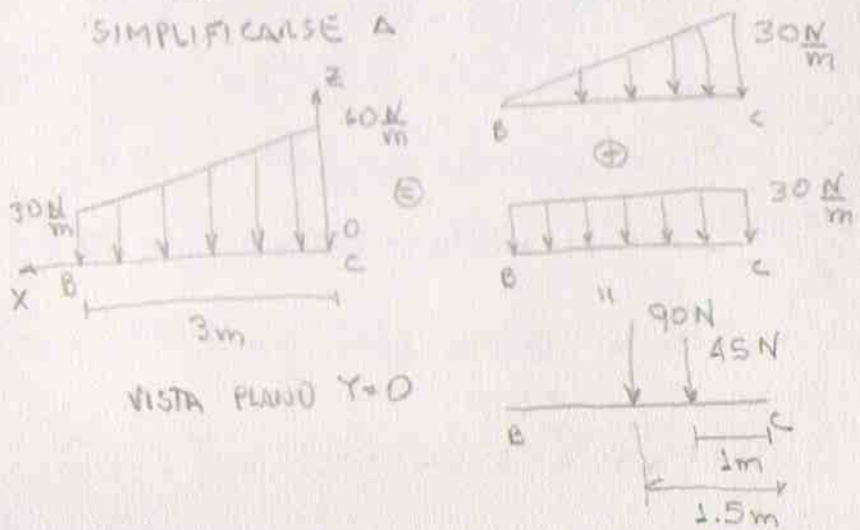
DADO EL SISTEMA



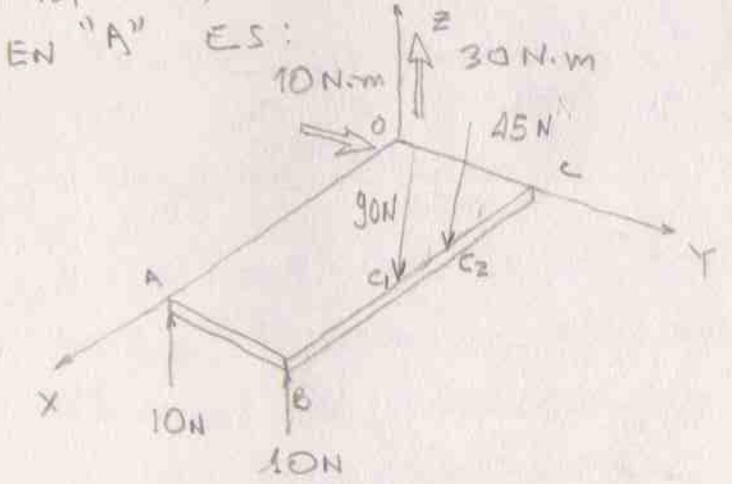
① _ OBTENGA EL SISTEMA FUERZA-PAR EQUIVALENTE EN EL PUNTO "A".

$$\overline{F} = (\overline{F_R})_{S1} \qquad ①$$

- LA FUERZA DISTRIBUIDA EN BC PUEDE SIMPLIFICARSE A



ASÍ QUE, EL SISTEMA A "REDUCIR" EN "A" ES:



$$\bar{F}_R = 20\hat{k} - 45\hat{k} - 90\hat{k} = (20-135)\hat{k}$$

$$\bar{F}_R = -115\hat{k} \quad [N]$$

$$\bar{F} = -115\hat{k} \quad [N]$$

ADEMÁS, DEBE SATISFACERSE:

$$\bar{M} = (\bar{M}_A)_{S_1}$$

$$\bar{M}_A = \bar{AB} \times 10\hat{k} + (\bar{AB} + \bar{BC_1}) \times (-90\hat{k}) + (\bar{AB} + \bar{BC_2}) \times (-45\hat{k}) + 30\hat{k} + 10\hat{j}$$

$$\bar{M}_A = 1\hat{j} \times 10\hat{k} + (\hat{j} - \tfrac{3}{2}\hat{\imath}) \times (-90\hat{k}) + (\hat{j} - 2\hat{\imath}) \times (-45\hat{k}) + 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

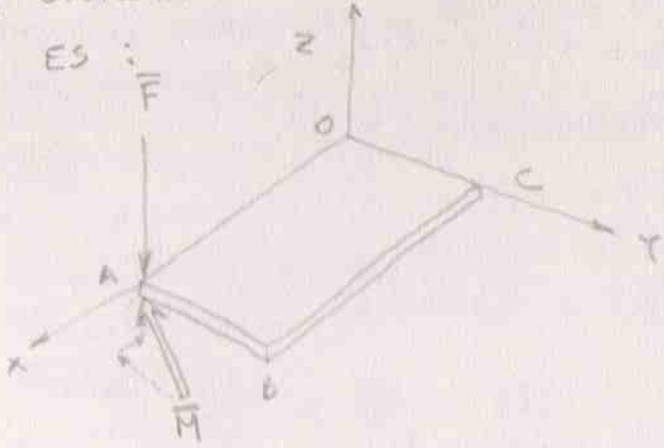
$$\bar{M}_A = (10 - 90 - 45)\hat{\imath} + (-3(45) - 90 + 10)\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$\bar{M}_A = -125\hat{\imath} + (-135 - 80)\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$\bar{M}_A = -125\hat{\imath} - 215\hat{j} + 30\hat{k} \quad [N \cdot m]$$

LUEGO: $\bar{M} = -125\hat{\imath} - 215\hat{j} + 30\hat{k}$ [N·m]

EL SISTEMA FUERZA-PAR REDUCIDO EN A ES:



$$\bar{F} = -115\hat{k} \quad [N]$$

$$\bar{M} = -125\hat{k} - 215\hat{j} + 30\hat{k} \quad [N \cdot m]$$

(2) HALLE EL MOMENTO TOTAL DEL SISTEMA RESPECTO A UN EJE QUE PASA POR LOS PUNTO O Y B

PUEDE HALLARSE SEGÚN:

$$M_{OB} = \bar{M}_O \cdot \hat{e}_{OB}$$

O TAMBIÉN COMO $M_{OB} = \bar{M}_B \cdot \hat{e}_{OB}$

SIENDO: $\hat{e}_{OB} = \dfrac{\bar{OB}}{OB}$

$$\bar{OB} = 3\hat{\imath} + \hat{j}, \quad OB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$\hat{e}_{OB} = \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{\jmath}$

$\overline{M}_O = \overline{M}_A + \overline{OA} \times \overline{F}$

$\overline{M}_O = -125\hat{\imath} - 215\hat{\jmath} + 30\hat{k} + 3\hat{\imath} \times (-115\hat{k})$

$\overline{M}_O = -125\hat{\imath} + (-215 + 345)\hat{\jmath} + 30\hat{k}$

$\overline{M}_O = -125\hat{\imath} + 130\hat{\jmath} + 30\hat{k}$ [N.m]

$M_{OB} = (-125\hat{\imath} + 130\hat{\jmath} + 30\hat{k}) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{10}}\hat{\jmath}\right)$

$= -\frac{375}{\sqrt{10}} + \frac{130}{\sqrt{10}} = -\frac{245}{\sqrt{10}}$ [N.m]

EL SIGNO (−) INDICA QUE LA "PROYECCIÓN" DE $\overline{M}_O$ SOBRE EL EJE OB ES DE SENTIDO OPUESTO A $\hat{e}_{OB}$.

(3) ¿PUEDE REDUCIRSE A UNA SOLA FUERZA?

DEBE VERIFICARSE SI:

$$\overline{M}_P \cdot \overline{F} \overset{?}{=} 0$$

SIENDO "P" CUALQUIER PUNTO

ASI SE PUEDE EVALUAR:

$\overline{M}_A \cdot \overline{F} = (-125\hat{\imath} - 215\hat{\jmath} + 30\hat{k}) \cdot (-115\hat{k})$

$= -3450$ [$N^2 m$]

DADO QUE $\overline{M}_A \cdot \overline{F} \neq 0$ EL SISTEMA __NO__ ES REDUCIBLE A UNA SOLA FUERZA

OBSERVE QUE TAMBIÉN:

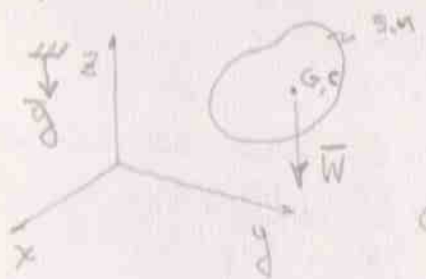
$\overline{M}_O \cdot \overline{F} = -3450$ [$N^2 m$]

CLASE 5

- CENTRO DE GRAVEDAD DE SISTEMAS MATERIALES (CONTINUACIÓN)

COMO HA SIDO YA MENCIONADO:

AL CONSIDERAR EL SISTEMA MATERIAL HOMOGÉNEO, Y LA ACCIÓN DEL CAMPO GRAVITATORIO UNIFORME Y CONSTANTE RESULTA:



G: CENTRO DE GRAVEDAD

$G = (X_G, Y_G, Z_G)$

C: CENTROIDE (DE VOLUMEN

$C = (X_C, Y_C, Z_C)$

g = cte

ρ = cte, $\rho = \frac{m}{V}$

$X_C = \int_V X\,dV / V$ . . . ①

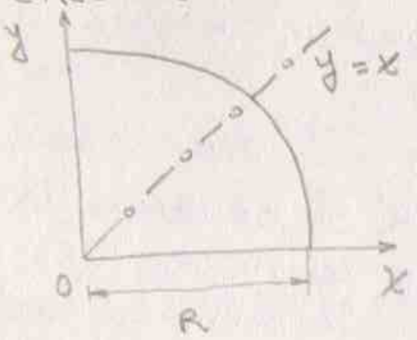
$Y_C = \int_V Y\,dV / V$ . . . ②

$Z_C = \int_V Z\,dV / V$ . . . ③

DEBE TOMARSE EN CUENTA QUE ①, ② Ó ③ PUEDEN "EVITARSE" SI EXISTE UNO (O MAS) EJES DE SIMETRÍA PARA EL SISTEMA MATERIAL

ALGUNOS EJEMPLOS:

- (1) CONSIDERE UNA PLACA (SECTOR) CIRCULAR DE ESPESOR t CONSTANTE



- DETERMINE EL CENTROIDE REFERIDO AL SISTEMA oxy DADO

SOLUCIÓN:

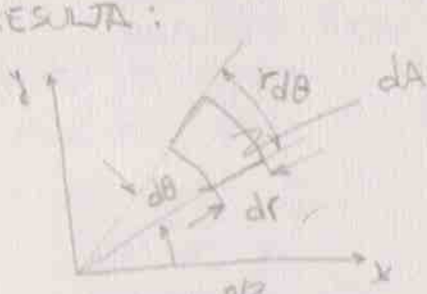
OBSERVE QUE EXISTE UN EJE (RADIAL) DE SIMETRÍA $y = x$. DE FORMA QUE SOLO SE REQUIERE ESTIMAR UNA COORDENADA DE "C" DADO QUE $\boxed{x_c = y_c}$

$$x_c = \frac{\int_V x\,dv}{V}, \quad \text{CON} \quad V = A\cdot t$$

$$x_c = \frac{\int_V x\cdot t\,dA}{A\cdot t} = \frac{\int_A x\,dA}{A}$$

(YA QUE EN ESTE CASO "C" DEPENDE DE LA "DISTUBUCIÓN DE ÁREA", "C" REPRESENTA UN CENTROIDE DE ÁREA.

UTILIZANDO COORDENADAS POLARES RESULTA:



$$\begin{cases} dA = r\,dr\,d\theta \\ x = r\cos(\theta) \end{cases}$$

SUSTITUYENDO:

$$x_c = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\cos(\theta)\,(r\cdot dr\cdot d\theta)$$

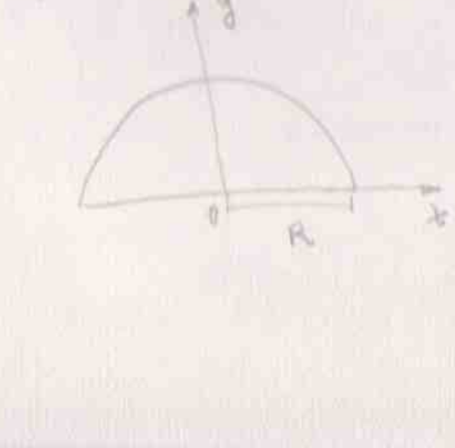
$$\text{CON} \quad A = \int_0^{\pi/2}\int_0^R r\,dr\,d\theta = \frac{R^2\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\,d\theta\cdot\left(\frac{R^3}{3}\right) = \frac{R^3}{3}\,\text{SEN}(\theta)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$x_c = \frac{4}{R^2\pi}\left(\frac{R^3}{3}\right)(1) = \frac{4R}{3\pi}$$

CONCLUYENDO: $C = (x_c, y_c) = \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$

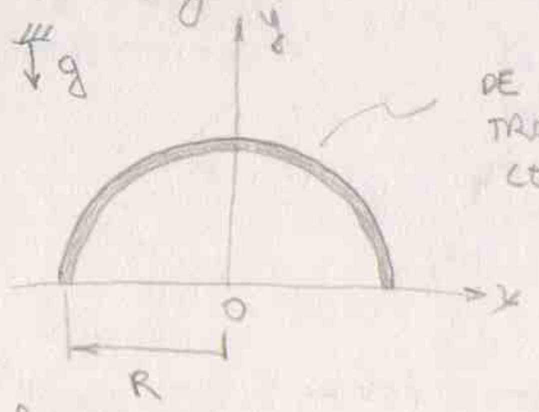
- DETERMINE EL CENTROIDE DE 1/2 PLACA CIRCULAR RESPECTO A oxy DADO:



RESPUESTA:

$C = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$

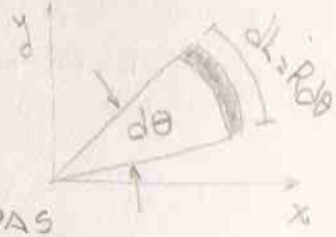
(2) CALCULAR EL CENTRO DE GRAVEDAD DE LA BARRA SEMI-CIRCULAR, HOMOGÉNEA Y DE RADIO R, RESPECTO A OXY DADO:



SOLUCIÓN:
APROVECHANDO SIMETRÍA, SE RECONOCE QUE $x_c = 0$. LUEGO.

$$y_c = \int_V y\, dV / V \quad , \text{ CON}$$

$$dV = A \cdot dL$$

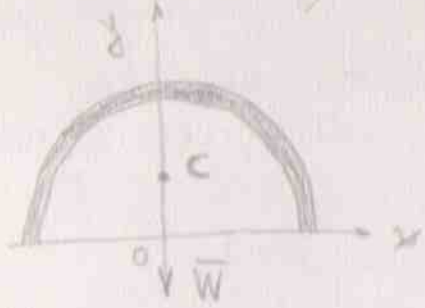


DE MODO QUE;
USANDO COORDENADAS POLARES:

$$y_c = \frac{1}{L} \int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta$$

$$y_c = \frac{1}{\pi R} R^2 \left[-\cos(\theta)\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

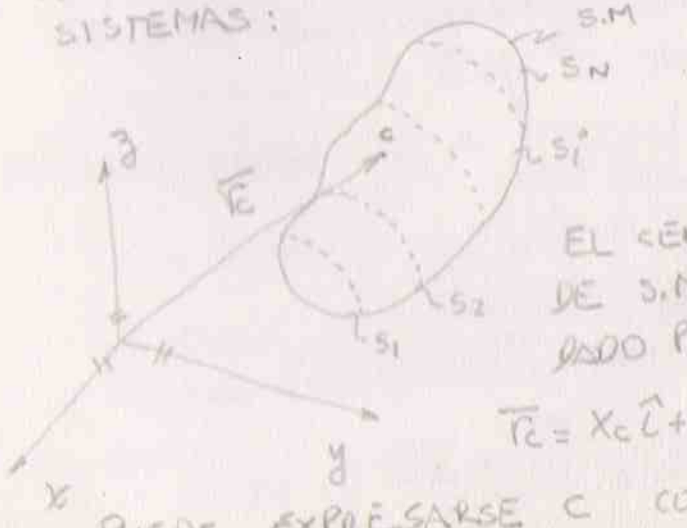
DE FORMA QUE LA LÍNEA DE ACCIÓN DEL PESO DE LA BARRA "CONTIENE" A $C = \left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$



OBSERVE QUE "C" NO PERTENECE A LA BARRA.

CENTROIDE DE "CUERPOS COMPUESTOS"

CONSIDERE UN SISTEMA MATERIAL CONFORMADO POR N CUERPOS O SUB-SISTEMAS:



EL CENTROIDE DE S.M VIENE DADO POR.

$$\vec{r}_c = x_c \hat{i} + y_c + z_c \hat{k}$$

PUEDE EXPRESARSE C COMO

FUNCIÓN DE LOS CENTROIDES DE LAS SUB-REGIONES "S_i" QUE CONFORMAN EL CUERPO:

$$x_c = \frac{1}{V}\int_V x\,dV = \frac{1}{V}\left[\int_{V_{S_1}} x\,dV + \int_{V_{S_2}} x\,dV \dots + \int_{V_{S_N}} x\,dV\right]$$

SI LOS CENTROIDES DE CADA SUB-REGIÓN SON CONOCIDOS ENTONCES:

$$x_{c_i} = \frac{1}{V_{S_i}}\int_{V_{S_i}} x\,dV$$

ASÍ QUE PUEDE ESCRIBIRSE:

$$x_c = \frac{1}{V}\left[x_{c_1}V_{S_1} + x_{c_2}V_{S_2} + \dots + x_{c_N}V_{S_N}\right]$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{c_i}V_i}{V}, \quad \text{CON } V = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

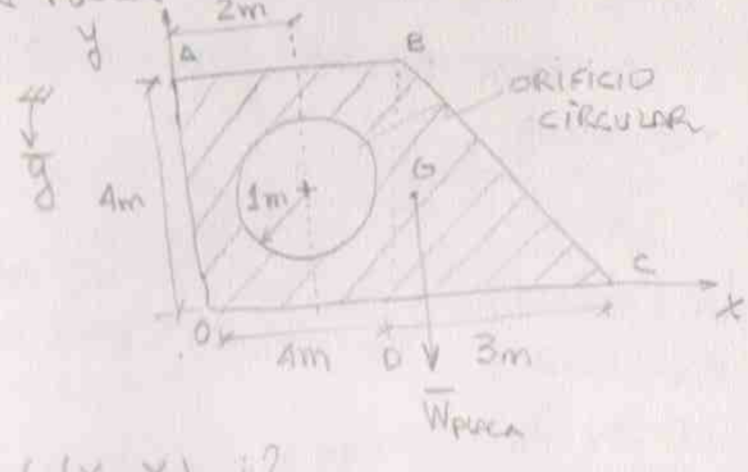
SIMILAR PARA LAS DEMÁS COORDENADAS:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_{c_i}V_i}{\sum V_i}$$

$$z_c = \frac{\sum z_{c_i}V_i}{\sum V_i}$$

EJEMPLO:

LA PLACA HOMOGÉNEA MOSTRADA PESA 300 N/m². UBIQUE LA LÍNEA DE ACCIÓN DEL PESO DE LA PLACA RESPECTO A OXY DADO



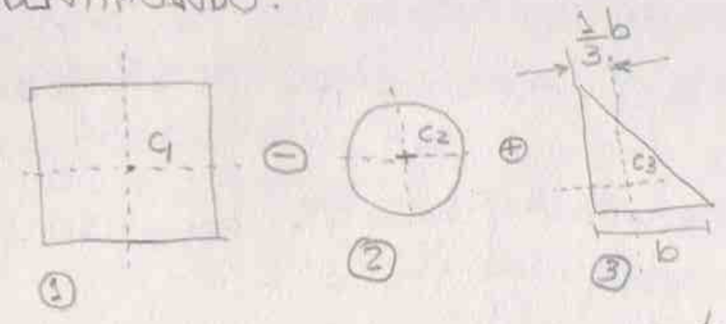
$G:(X_G, Y_G)$ ¿?

OBSERVE QUE SOLO ES NECESARIO DETERMINAR X_G PARA "UBICAR" $\vec{W}_{PLACA}$ RESPECTO A OXY. ASÍ:

$X_G = \int_V x\,dV/V$, SI SE "DESCOMPONE" LA PLACA EN CUERPOS DE GEOMETRÍA REGULAR (CONOCIDA) PUEDE HALLARSE COMO:

$$X_G = \frac{\sum_i x_{c_i}V_i}{V_i}$$

IDENTIFICANDO:



SI LA PLACA ES DE ESPESOR t CONSTANTE: $V = A \cdot t$ Y

$$x_c = \sum_{i=1}^{3} x_{c_i} A_i / A_T \quad , \quad A_T = A_1 - A_2 + A_3$$

LA EXPRESIÓN PARA HALLAR x_c PUEDE EVALUARSE "TABULANDO" LOS DATOS DE ①, ② Y ③

ELEMENTO	$A_i\,[m^2]$	$x_{c_i}\,[m]$	$x_{c_i} \cdot A_i\,[m^3]$
①	16	2	32
②	$-\pi$	2	-2π
③	6	$4 + \frac{1}{3}(3)$	30
Σ	$(22-\pi)$	/	$62 - 2\pi$

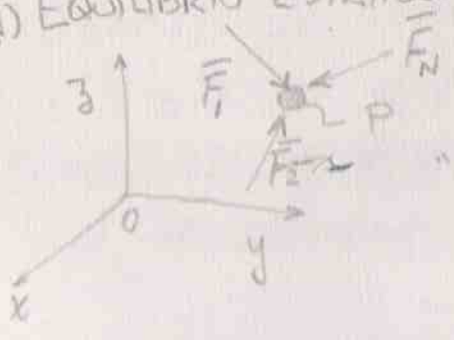
ASÍ: $x_c = \dfrac{62 - 2\pi}{22 - \pi} \cong 2.95\,m$

$W_{PLACA} = 300 \cdot (22-\pi) \cong 5657.52\,N$

LA LÍNEA DE ACCIÓN DE W_{PLACA} PASA POR $(2.95, 0)\,(m)$

EQUILIBRIO DE SISTEMAS MATERIALES

-(1) EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UNA "PARTÍCULA"

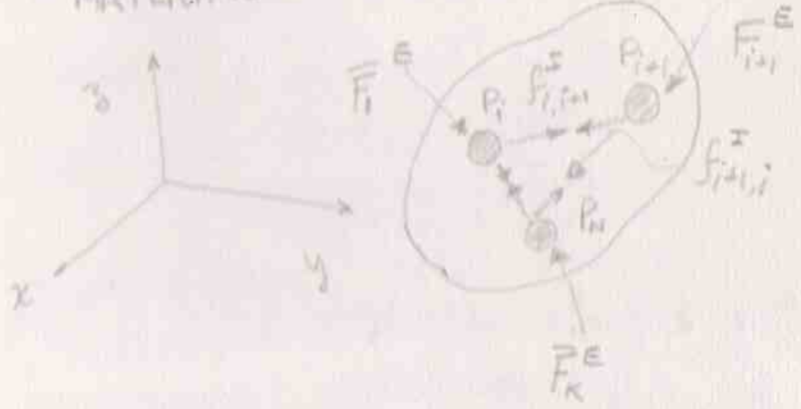


LA PARTÍCULA "P" ESTÁ EN EQUILIBRIO ESTÁTICO SI:

$$\bar{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i = \bar{0} \quad ①$$

PARA EL CASO DE UNA PARTÍCULA ① ES CONDICIÓN SUFICIENTE.

-(2) EQUILIBRIO ESTÁTICO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS (SISTEMA MATERIAL DISCRETO)



DISTINGUIMOS:

$\bar{F}^E$: FUERZA EXTERNA (AL SISTEMA)

$\bar{f}^I$: " INTERNA (ENTRE PARTÍCULAS)

PARA LA PARTÍCULA i CUALQUIERA:

$$\overline{F}_i^E + \overline{f}_i^I = \overline{0} \quad \ldots\ldots \text{(a)}$$

SIENDO:

$\overline{F}_i$: FUERZA EXTERNA SOBRE i

$\overline{f}_i$: " <u>INTERNA</u> RESULTANTE SOBRE i (GENERADA POR LA INTERACCIÓN DE LAS OTRAS PARTÍCULAS]

ASÍ PARA TODAS LAS PARTÍCULAS:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{F}_i^E + \overline{f}_i^I = \overline{0} \\ \overline{F}_{i+1}^E + \overline{f}_{i+1}^I = \overline{0} \\ \vdots \\ \overline{F}_N^E + \overline{f}_N^I = \overline{0} \end{array}\right.$$

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^E + \sum_{i=1}^{N} \overline{f}_i^I = \overline{0}$$

POR ACCIÓN Y REACCIÓN $\sum \overline{f}_i^I = \overline{0}$

DE MODO QUE:

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i^E = 0 \quad \ldots \quad \text{(I)}$$

ESTA CONDICIÓN <u>NO</u> ES SUFICIENTE PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS (CUERPO). SE REQUIERE ADEMÁS QUE EL MOMENTO RESULTANTE (RESPECTO A CUALQUIER PUNTO) SEA NULO, ASÍ:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{r}_i \times (\overline{F}_i^E + \overline{f}_i^I) = \overline{0} \\ \overline{r}_{i+1} \times (\overline{F}_{i+1}^E + \overline{f}_{i+1}^I) = \overline{0} \\ \vdots \\ \overline{r}_N \times (\overline{F}_N^E + \overline{f}_N^I) = \overline{0} \end{array}\right.$$

$$\sum(\overline{r}_i \times \overline{F}_i^E) + \sum(\overline{r}_i \times \overline{f}_i^I) = \overline{0}$$

SIENDO $\sum(\overline{r}_i \times \overline{f}_i^I) = \overline{0}$ SE REQUIERE ENTONCES QUE:

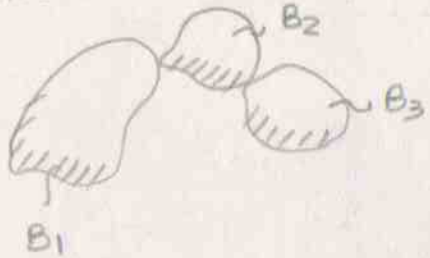
$$\sum \overline{r}_i \times \overline{F}_i^E = \overline{0}$$

CONCLUYENDO: SI EL SISTEMA FUERZA-PAR (SISTEMA DE FUERZAS EXTERNAS) EQUIVALENTE RESPECTO A CUALQUIER PUNTO ES NULO EL CUERPO ESTÁ EN EQUILIBRIO ESTÁTICO

CLASE 6:

EL ANÁLISIS DE UN SISTEMA MATERIAL EN EQUILIBRIO ESTÁTICO COMIENZA POR LA IDENTIFICACIÓN Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE TODAS LAS FUERZAS <u>EXTERNAS</u> SOBRE DICHO SISTEMA. ESTA REPRESENTACIÓN SE CONOCE COMO DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL)

EJEMPLO:

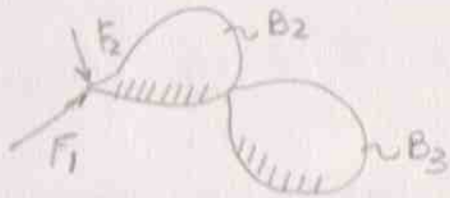


B_1, B_2, B_3 : CUERPOS O SISTEMAS MATERIALES

PARA REPRESENTAR EL DCL DE B_2 SE "SEPARA" EL CUERPO DE SU ENTORNO PARA IDENTIFICAR LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE ÉSTE.

DCL (B_2)

NOTE QUE SI SE CONSIDERA EL DCL DE B_2 Y B_3, F_3 Y F_4 SE "TRANSFORMAN" EN FUERZAS INTERNAS (EN UN DCL NO SE REPRESENTAN LAS FUERZAS INTERNAS, YA QUE SUS EFECTOS NETOS SE ANULAN POR ACCIÓN Y REACCIÓN)



DCL (B_2, B_3)

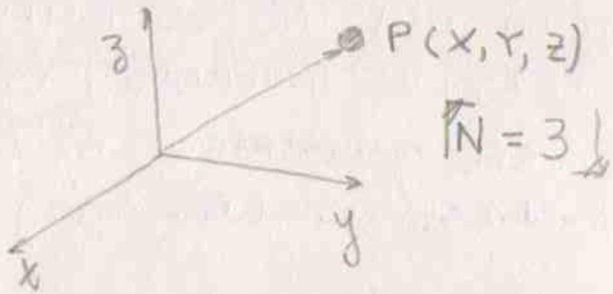
DOS CONCEPTOS SON NECESARIOS PARA LA APLICACIÓN DE DCL CON EL OBJETO DE ESTUDIAR EQUILIBRIO ESTÁTICO:

ⓐ GRADOS DE LIBERTAD (GDL)

ⓑ VÍNCULOS (SOPORTES).

\- GRADOS DE LIBERTAD :

(I) GRADOS DE LIBERTAD DE UNA PARTÍCULA : NÚMERO <u>MÍNIMO</u> DE PARÁMETROS GEOMÉTRICOS PARA DESCRIBIR LA POSICIÓN DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO.

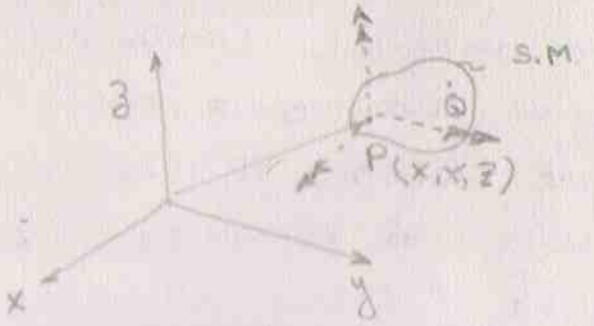


$\boxed{N = 3}$

NOTE QUE NO DEPENDE DEL SISTEMA USADO PARA IDENTIFICAR LOS GDL DE LA PARTÍCULA (EJ: EN COORDENADAS CILÍNDRICAS TAMBIÉN N = 3)

EN EL PLANO UNA PARTÍCULA POSEE 2 GDL (N=2)

(II) GRADOS DE LIBERTAD DE UN CUERPO RÍGIDO



$|\overline{PQ}| = cte$ SI EL CUERPO ES RÍGIDO

LA CONFIGURACIÓN DEL S.M O CUERPO <u>RÍGIDO</u> ESTÁ DADA SI SE UTILIZAN AL MENOS 6 PARÁMETROS (UN CUERPO RÍGIDO PUEDE REALIZAR TRASLACIÓN Y/O ROTACIÓN, POR ELLO RESULTAN 3 PARÁMETROS PARA DESCRIBIR TRASLACIÓN Y 3 ADICIONALES PARA ROTACIÓN). EN EL PLANO UN CUERPO RÍGIDO POSEE 3 GDL (2 TRASLACIONES INDEPENDIENTES Y UNA ROTACIÓN $\perp$ AL PLANO)

. VÍNCULOS: ELEMENTOS SOPORTES QUE "INTERACTÚAN" SOBRE EL CUERPO O SISTEMA MATERIAL LIMITANDO PARCIAL O TOTALMENTE SUS GRADOS DE LIBERTAD. DICHA INTERACCIÓN SE MANIFIESTA A TRAVÉS DE FUERZAS APLICADAS (REACCIONES).

CLASE 7

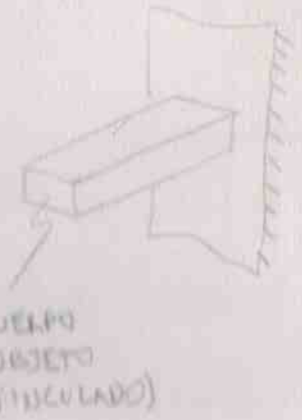
REACCIONES DEBIDAS A VÍNCULOS

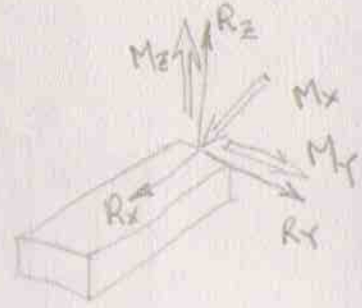
UN VÍNCULO LIMITA (RESTRINGE) UNO O MAS GRADOS DE LIBERTAD EN UN SISTEMA MATERIAL GENERANDO UNA (O MAS) FUERZA EN LA DIRECCIÓN EN LA CUAL SE LIMITA EL GRADO DE LIBERTAD

LAS REACCIONES SON FUERZAS QUE "RESPONDEN" A UN ESTADO DE FUERZA EXTERNO APLICADO SOBRE EL SISTEMA MATERIAL.

- ALGUNOS EJEMPLOS DE VÍNCULOS:

(a) EMPOTRAMIENTO:

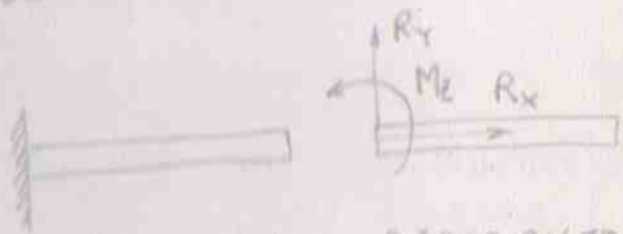




RESTRINGE 6 GDLs

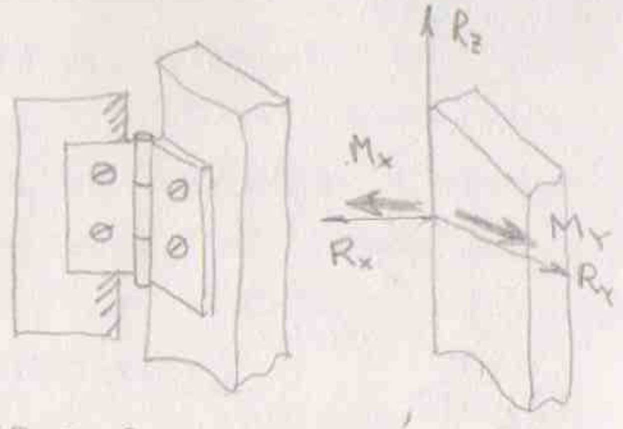
EN GENERAL, ALGUNAS DE LAS REACCIONES PUEDEN SER NULAS, DEPENDIENDO DE LAS FUERZAS APLICADAS SOBRE EL CUERPO

EL CASO "PLANO" DE ESTE VÍNCULO ES



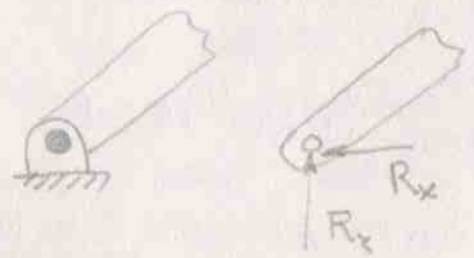
LOS SENTIDOS DE LAS REACCIONES DEPENDERÁ DE LAS FUERZAS APLICADAS EN EL CUERPO, PARA SATISFACER EQUILIBRIO ESTÁTICO.

(b) ARTICULACIÓN (BISAGRA)

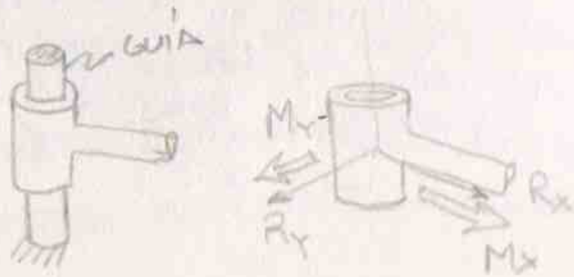


OBSERVE QUE ESTE VÍNCULO RESTRINGE 5 GDL

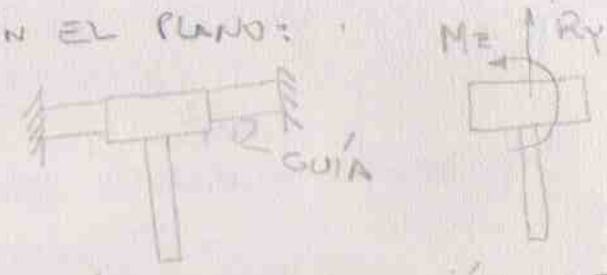
EN EL PLANO



(c) ARTICULACIÓN TIPO CORREDERA (CONTACTO LISO)

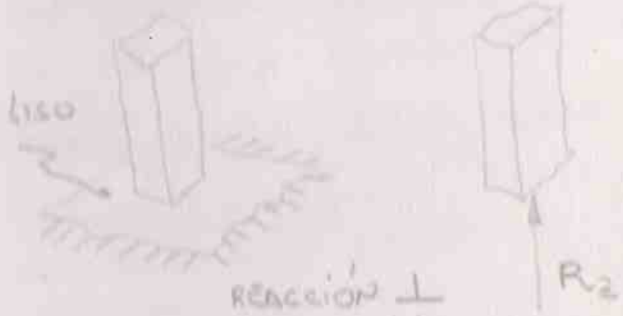


EN EL PLANO:



(d) RÓTULA (ARTICULACIÓN ESFÉRICA)

(e) APOYO SIMPLE (SIN CONTACTO RUGOSO)



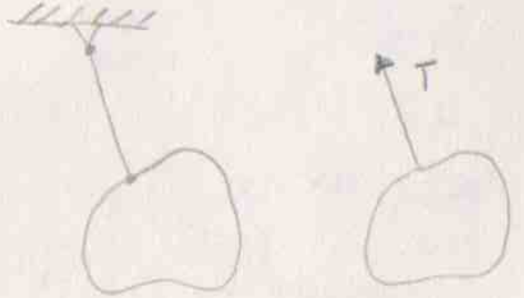
REACCIÓN ⊥ A SUPERFICIE DE CONTACTO

PLANO

(f) BARRA IDEAL

UNA BARRA "IDEAL" POSEE PESO, DESPRECIABLE Y LA REACCIÓN QUE GENERA ES PARALELA AL EJE AXIAL DE LA BARRA

(g) CUERDA



ES SIMILAR A LA GENERADA POR UNA BARRA, <u>PERO</u> SU SENTIDO ES CONOCIDO YA QUE LA CUERDA SOLO PUEDE TRANSMITIR FUERZA

EN UN SOLO SENTIDO (CUANDO ESTÁ EN TENSIÓN)

ESTOS VÍNCULOS TAMBIÉN PUEDEN COMBINARSE PARA PRODUCIR OTRO TIPO DE VINCULACIÓN.

A TRAVÉS DE UNA DEBIDA VINCULACIÓN SE ASEGURA QUE UN SISTEMA MATERIAL SE ENCUENTRE EN EQUILIBRIO ESTÁTICO.

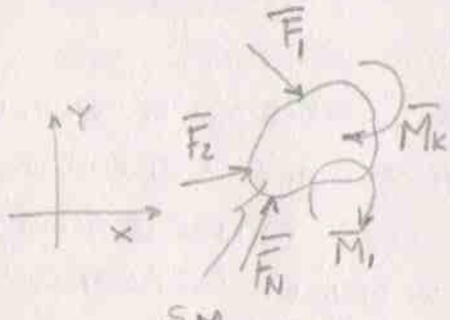
EN GENERAL, LOS "PROBLEMAS DE EQUILIBRIO ESTÁTICO" CONSISTEN EN DETERMINAR LAS REACCIONES QUE APLICADAS SOBRE UN SISTEMA MATERIAL ASEGURAN SU EQUILIBRIO ESTÁTICO.

HASTA AHORA, EN EL CASO DE SISTEMAS MATERIALES RÍGIDOS, LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO SON LAS HERRAMIENTAS DISPONIBLES PARA RESOLVER ESTOS PROBLEMAS. ESTO ES:

$$\sum \overline{F}^E = \overline{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x^E = 0 \\ \sum F_y^E = 0 \\ \sum F_z^E = 0 \end{cases} ; \sum \overline{M}_O^E = \overline{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum M_{Ox}^E = 0 \\ \sum M_{Oy}^E = 0 \\ \sum M_{Oz}^E = 0 \end{cases}$$

NOTE QUE ESTAS CONDICIONES REPRESENTAN 2 ECUACIONES VECTORIALES O, EQUIVALENTEMENTE, 6 ECUACIONES ESCALARES.

PARA EL CASO "PLANO" (SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES) LAS DOS ECUACIONES VECTORIALES SE REDUCEN A 3 ESCALARES:



$\sum \bar{F}^E = \bar{0} \quad \ldots ①$

$\sum \bar{M}^E = \bar{0} \quad \ldots ②$

① Y ② IMPLICAN:

$\sum F_x^E = 0$

$\sum F_y^E = 0$

$\sum M_{0z}^E = 0$

NOTE QUE EN ESTE CASO, DADO QUE EL SISTEMA DE FUERZA ES COPLANAR, LAS DEMÁS ECUACIONES:

$$\sum F_z^E = 0 , \ \sum M_x^E = 0 , \ \sum M_y^E = 0$$

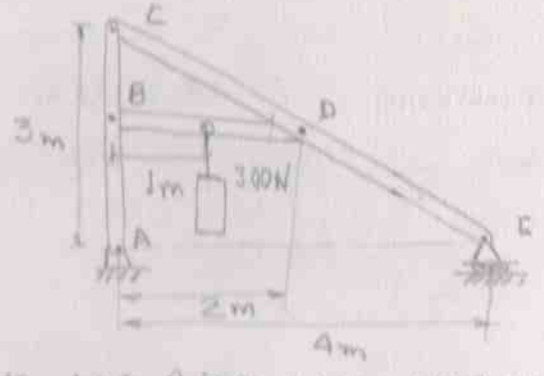
SE SATISFACEN SIEMPRE, INDEPENDIENTEMENTE DEL PROBLEMA (YA QUE

EL CONJUNTO DE FUERZAS SOLO ESTÁ EN EL PLANO Z=0 O PLANO XY)

CLASE 8

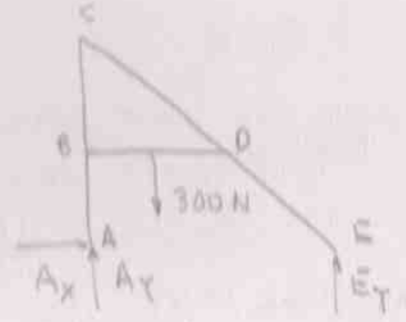
ESTRUCTURAS PLANAS (EQUILIBRIO)

- DADA LA SIGUIENTE ESTRUCTURA



HALLE LAS REACCIONES EJERCIDAS POR LOS PASADORES SOBRE LA BARRA BD.

- SOLUCIÓN:

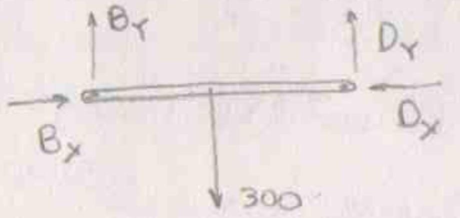


DCL (ESTRUCTURA)

$+\uparrow \sum F_y^E = 0 , \quad A_Y + E_Y = 300 \quad \overset{+}{\rightarrow} \sum F_x^E = 0 , \ A_x = 0$

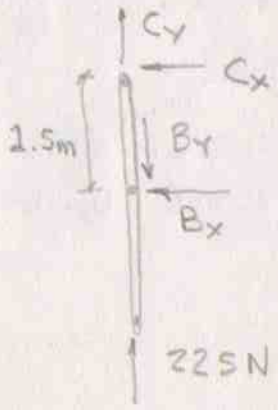
$+\circlearrowleft \sum M_A^E = 0 , \quad 300(1) = 4E_Y \quad , \ E_Y = \frac{300}{4} = \frac{150}{2}$

$A_Y = 300 - \frac{150}{2} = 300 - 75 = 225\ N$



DCL (BD)

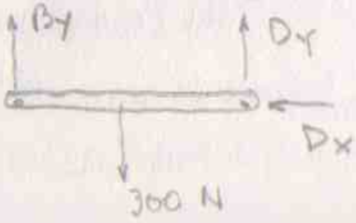
4 INCÓGNITAS, SOLO 3 ECUACIONES DE EQUILIBRIO. SE REQUIERE CALCULAR AL MENOS 1 DE LAS INCÓGNITAS MEDIANTE OTRO DCL



DCL (AC)

$+\circlearrowleft \sum M_C^E = 0 \ , \ B_x(1.5) = 0 , \ B_x = 0$

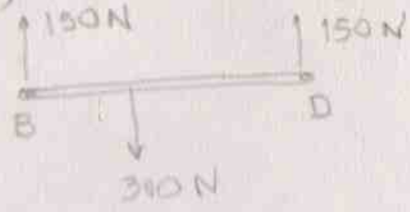
LUEGO EN EL DCL (BD):



$\xrightarrow{+} \sum F_x^E = 0 \ , \quad D_x = 0$

$+\circlearrowleft \sum M_B^E = 0 , \quad 300(1) = D_Y(2) \ , \ D_Y = 150\ N$

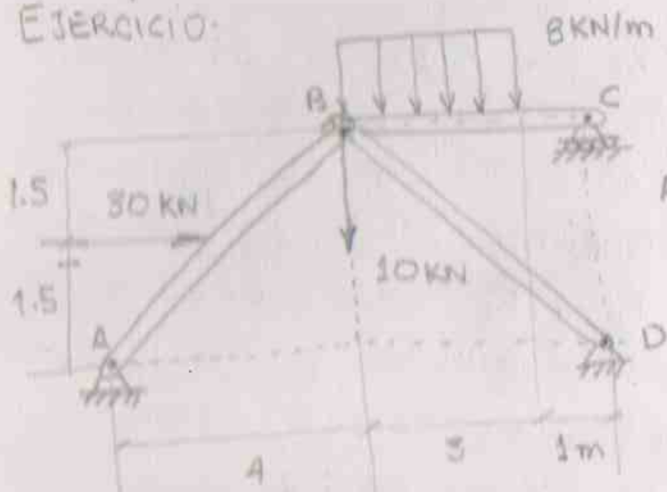
$+\uparrow \sum F_Y^E = 0 \ , \quad B_Y = 300 - D_Y \ , \ B_Y = 150\ N$



DCL (BD)

CLASE 9

EJERCICIO:



A, D: ARTICULACIÓN PLANA

C: APOYO SIMPLE (RODILLO)

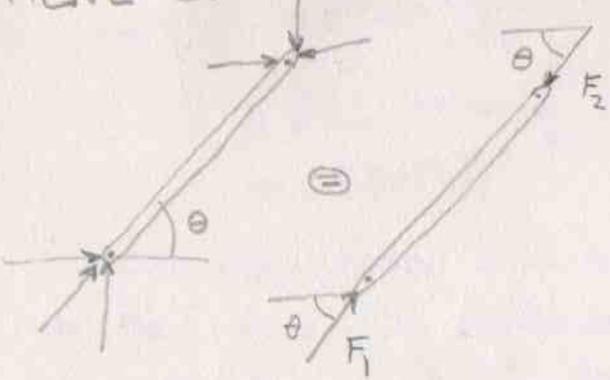
ENCUENTRE TODAS LAS REACCIONES DE VÍNCULOS EN LAS TRES BARRAS

SOLUCIÓN:

AL ANALIZAR UNA ESTRUCTURA ES CONVENIENTE "IDENTIFICAR" SI EXISTEN BARRAS "IDEALES", YA QUE ESTO SIMPLIFICA EL

NÚMERO DE INCÓGNITAS.

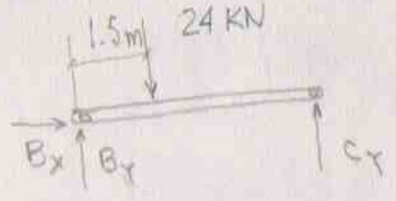
UNA BARRA "IDEAL", EN GENERAL, TIENE LA SIGUIENTE CONFIGURACIÓN:



SOMETIDA A FUERZAS EXTERNAS EN DOS PUNTOS (USUALMENTE LOS EXTREMOS) ⇒ EL EQUILIBRIO DE MOMENTO $\sum M_O^E = 0$ EXIGE QUE F_1 Y F_2 SEAN COLINEALES Y EN ESTE CASO EN LA DIRECCIÓN AXIAL DE LA BARRA (ADEMÁS DE $F_1 = F_2$, POR EQUILIBRIO DE FUERZAS)

EN LA ESTRUCTURA DADA BD CUMPLE CON ESTA CONDICIÓN (NOTE QUE AB, BC <u>NO</u> SON BARRAS IDEALES)

- DESPIECE:



$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^E = 0,\ B_x = 0$

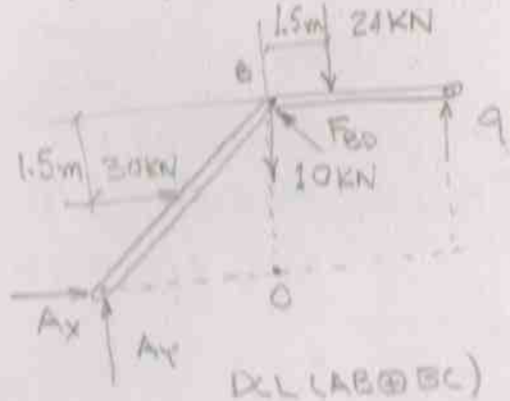
$\circlearrowleft + \sum M_B^E = 0,$

$24\left(\frac{3}{2}\right) = 4C_Y$

DCL (BC)

$C_Y = 9\text{ KN}$

$\sum F_Y^E = 0,\quad B_Y = 24 - C_Y,\quad B_Y = 15\text{ KN}$



DCL (AB ⊕ BC)

$\boxed{\tan\theta = \frac{3}{4}}$

$\circlearrowleft + \sum M_O^E = 0,\quad 4A_Y - \left(\frac{4}{5}F_{BD}\right)(3) + \left(\frac{3}{2}\right)(24) - (4)9 + 30\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

$4A_Y - \frac{12}{5}F_{BD} + 36 - 36 + 45 = 0$

$A_Y - \frac{3}{5}F_{BD} = -\frac{45}{4} \quad \ldots \text{①}$

$+\uparrow \sum F_Y^E = 0,\quad A_Y + \frac{3}{5}F_{BD} + 9 = 24 + 10$

$A_Y + \frac{3}{5}F_{BD} = 25 \quad \ldots \text{②}$

$\begin{cases} A_Y - 3/5\,F_{BD} = -45/4 \\ A_Y + 3/5\,F_{BD} = 25 \end{cases}$

$2A_Y = 55/4,\quad A_Y = 55/8\text{ KN}$

Así $F_{BD} = \frac{5}{3}\left(A_Y + \frac{45}{4}\right)$

$$F_{BD} = \frac{5}{3}\left(\frac{55}{8} + \frac{45}{4}\right)$$

$$F_{BD} = \frac{5}{3}\left(\frac{55 + 90}{8}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{145}{8}\right) = \frac{725}{24}$$

$$F_{BD} = 30.21 \text{ KN}$$

$$A_Y = 6.88 \text{ KN}$$

Además:

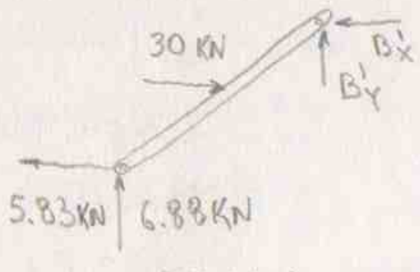
$\xrightarrow{+} \sum F_x^E = 0, \quad A_x + 30 = \frac{4}{5} F_{BD}$

$$A_x = \frac{4}{5}\left(\frac{725}{24}\right) - 30$$

$$A_x = \frac{145}{6} - 30$$

$$A_x = -\frac{35}{6} = -5.83 \text{ KN}$$

(A_x tiene sentido contrario al supuesto originalmente)



DCL (AB)

$\xrightarrow{+} \sum F_x^E = 0$

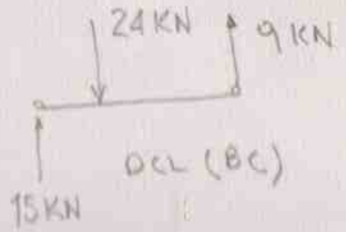
$$30 - B_x' - 5.83 = 0$$

$$B_x' = 24.17 \text{ KN}$$

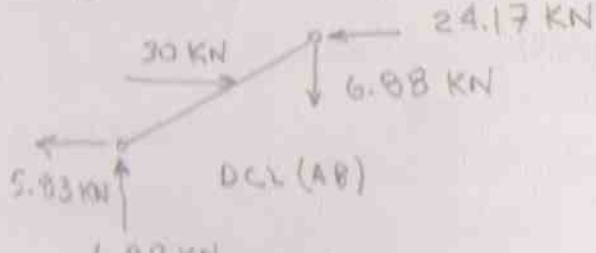
$\uparrow \sum F_Y^E = 0$

$$B_Y = -6.88 \text{ KN}$$

Concluyendo:



DCL (BC)



DCL (AB)

DCL (BD)

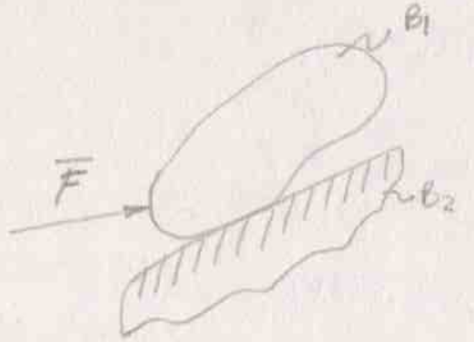
Observe que una forma de verificar el cálculo de reacciones puede ser $\sum M_A^E$ en el DCL (AB) $\Rightarrow$ debe ser ≈ 0 (considerando errores por redondeo)

- Clase 10

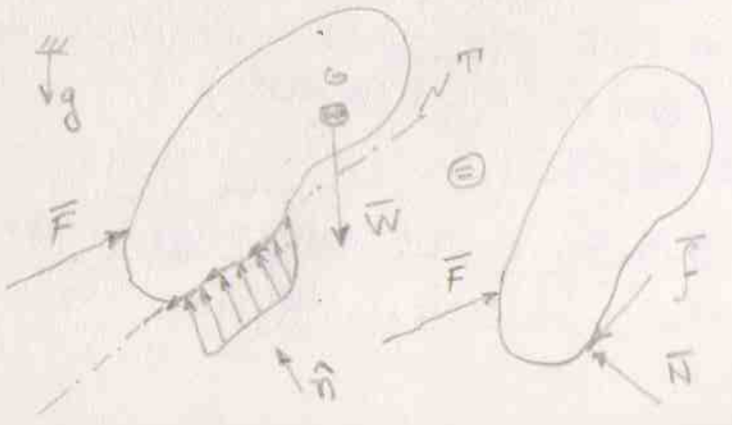
Contacto entre superficies rugosas: Fricción seca (Modelo de Coulomb)

MODELO DE COULOMB:

CONSIDERE DOS CUERPOS EN CONTACTO A TRAVÉS DE SUS SUPERFICIES RUGOSAS



UNA FUERZA (RESULTANTE) SOBRE B_1 PUEDE GENERAR UN MOVIMIENTO RELATIVO DE B_1 RESPECTO A B_2. SUPONGA QUE LA FUERZA $\bar{F}$ SE INCREMENTA DE FORMA PAULATINA Y SE REQUIERE ESTUDIAR LAS REACCIONES EN EL CONTACTO RUGOSO.



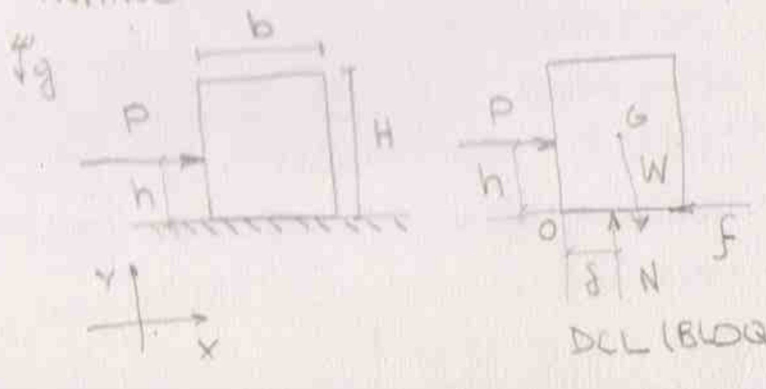
SE IDENTIFICAN:

T: PLANO TANGENTE A LAS SUPERFICIES EN CONTACTO

$\hat{n}$: VERSOR $\perp T$

LAS REACCIONES PUEDEN CONSIDERARSE COMO FUERZAS DISTRIBUIDAS: UNA EN LA DIRECCIÓN $\hat{n}$ Y OTRA FUERZA CONTENIDA EN EL PLANO T CUYO VALOR ES DISTINTO DE CERO, SIEMPRE QUE EXISTA LA "TENDENCIA" AL DESLIZAMIENTO RELATIVO, O BIEN QUE EFECTIVAMENTE OCURRA. EN AMBOS CASOS SE TIENE QUE f ES OPUESTA AL <u>DESLIZAMIENTO</u> (EFECTIVO O APARENTE)

- DESLIZAMIENTO Y VOLCADURA INMINENTE.



DEL DCL (BLOQUE) SE TIENE:

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x^E = 0 \;,\; P = f \;\ldots$ ①

$+\uparrow \sum F_y^E = 0 \;,\; N = W \;\ldots$ ②

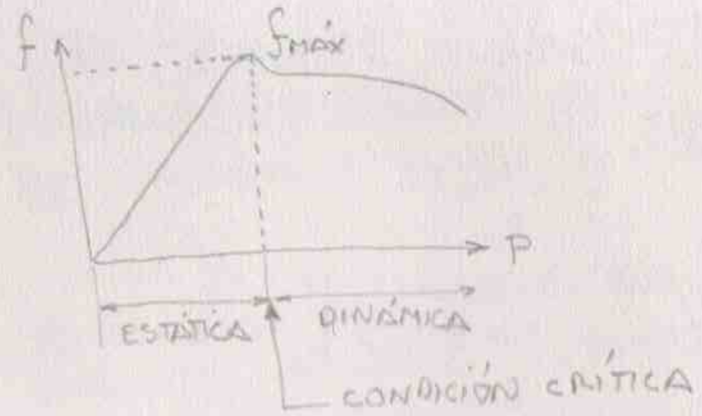
$+\circlearrowright \sum M_O^E = 0 \;,\; Ph + W\frac{b}{2} = \delta N \;\ldots$ ③

¿CÓMO PUEDE "PERDER" EL EQUILIBRIO EL BLOQUE SI P SE AUMENTA DE FORMA CONTROLADA (LENTAMENTE)?

(i) - DESLIZANDO
(ii) - VOLCANDO
(iii) - AMBAS (i), (ii), DE FORMA SIMULTÁNEA

INTERESA ESTUDIAR O DESCRIBIR EL EQUILIBRIO ESTÁTICO HASTA LA CONDICIÓN CRÍTICA O "INMINENTE", ES DECIR, JUSTO ANTES DE QUE SUCEDA ALGUNO DE LOS CASOS MENCIONADOS.

- ASUMIENDO QUE EL BLOQUE SOLO DESLICE, LA MAGNITUD DE LA FUERZA DE ROCE VENDRÁ DESCRITA POR ①:



SEGÚN LO EXPERIMENTADO POR COULOMB (1781):

- f ES INDEPENDIENTE DEL ÁREA DE CONTACTO ENTRE SUPERFICIES
  *(SIENDO AMBOS CUERPOS RÍGIDOS)
- EN LA CONDICIÓN CRÍTICA O DESLIZAMIENTO INMINENTE:

$$f_{máx} \propto N$$

$$f_{máx} = \mu_s N \;\ldots\ldots$$ Ⓘ

CON μ_s: COEFICIENTE DE ROCE ESTÁTICO

NOTE QUE Ⓘ ES UNA RELACIÓN ENTRE LAS MAGNITUDES DE f Y N <u>SOLO</u> VÁLIDA EN DESLIZAMIENTO INMINENTE. EN CONDICIÓN ESTÁTICA

$$f \leq \mu_s \cdot N$$

PARA LA CONDICIÓN DINÁMICA, EN EL CASO DE "BAJAS VELOCIDADES":

$$f = \mu_K N \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

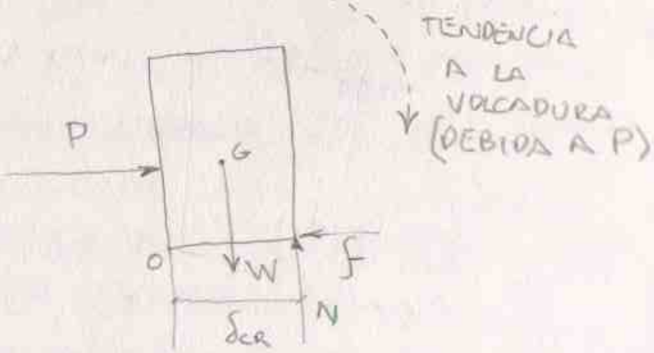
CON:

μ_K: COEFICIENTE DE ROCE CINÉTICO, USUALMENTE

$$\mu_K \approx 0.75\mu_s$$

LOS COEFICIENTES DE ROCE μ_s Y μ_K DEPENDEN DE LOS MATERIALES EN CONTACTO Y SE ASUMEN CONSTANTES PARA CUALQUIER PUNTO DE CONTACTO.

- AHORA, SI EN LUGAR DE DESLIZAR EL BLOQUE ESTÁ A PUNTO DE VOLCAR, LA CONDICIÓN CRÍTICA DE EQUILIBRIO VENDRÁ DADA POR:



2 → ③ $\quad Ph + W\frac{b}{2} = \delta_{cR} N$

EN VOLCADURA INMINENTE δ_{cR} NO ES DESCONOCIDO. PARA ESTE EJEMPLO $\delta_{cR} = b$ (NO SIEMPRE ES IGUAL, DEPENDE DEL PROBLEMA ESTUDIADO Y DESDE DONDE SE MIDA).

EN EL CASO DE SUCEDER "PRIMERO" (A PUNTO DE VOLCADURA INMINENTE ("A PUNTO DE VOLCARSE"). SE DEBE CUMPLIR QUE

$$f \leq \mu_s N.$$

- FINALMENTE, SI LA CONDICIÓN CRÍTICA ES SIMULTÁNEA ENTONCES:

$$\begin{cases} f = f_{máx} = \mu_s N, \text{ Y} \\ \delta = \delta_{cr} \end{cases}$$

RESUMIENDO:

- DESLIZAMIENTO INMINENTE:

$$f = f_{máx} = \mu_s N, \text{ SIEMPRE QUE}$$

$$\delta < \delta_{cR}$$ (*) (DEPENDE DESDE DONDE SE MIDA δ)

- VOLCADURA INMINENTE

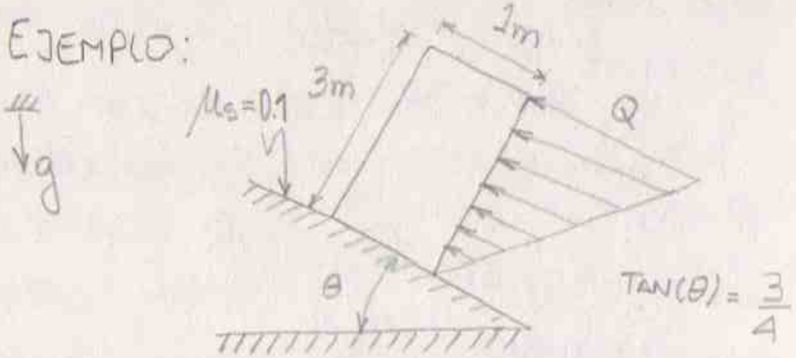
$$\delta = \delta_{cR}, \text{ SIEMPRE QUE}$$

$$f < f_{máx} \Rightarrow f < \mu_s N$$

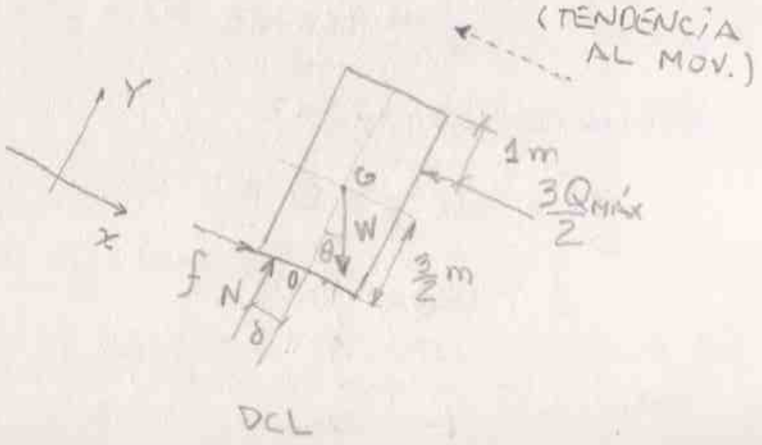
- EN DESLIZAMIENTO Y VOLCADURA INMINENTE: $f = f_{máx}$, $\delta = \delta_{cR}$

ES POSIBLE INVESTIGAR A CUAL DE LAS TRES POSIBILIDADES VISTAS CORRESPONDE LA CONDICIÓN CRÍTICA DE UN SISTEMA ANALIZADO. ESTO PUEDE HACERSE SUPONIENDO UNA DE ELLAS Y LUEGO VALIDANDO DICHA HIPÓTESIS

EJEMPLO:



PARA EL BLOQUE HOMOGÉNEO DE PESO IGUAL A 30N, ESTIME EL MÁXIMO VALOR DE LA INTENSIDAD Q POSIBLE PARA QUE EL BLOQUE PERMANEZCA EN EQUILIBRIO.



$\overset{+}{\searrow} \sum F_x^E = 0, \; -\frac{3Q_{máx}}{2} + f + \frac{3}{5}W = 0 \; . . ①$

$+\!\!\nearrow \sum F_y^E = 0, \quad N = \frac{4}{5}W \quad . . ②$

$\circlearrowleft\!+ \sum M_O^E = 0, \quad \delta N + \frac{3}{5}W\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}Q_{máx}(2) \; ③$

UNA OPCIÓN PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA CONSISTE EN HALLAR DOS VALORES DE $Q_{máx}$ MEDIANTE SUPOSICIÓN DE:
(a) DESLIZAMIENTO INMINENTE Y (b) VOLCADURA INMINENTE. LUEGO, EL VALOR DE $Q_{máx}$ SERÁ EL <u>MÍNIMO</u> VALOR QUE RESULTE DE COMPARAR (a) Y (b).

i→(a) ASUMIENDO DESLIZAMIENTO INMINENTE:

$f = f_{máx} = \mu_s N$

POR ① Y ②: $Q_{máx} = \left[\frac{3}{5}W + 0.1\left(\frac{4}{5}W\right)\right]\cdot\frac{2}{3}$

$Q_{máx} = \frac{2}{15}\left(\frac{34}{10}W\right) = \frac{34}{75}W \; . . . ⓘ$

ii→(b) ASUMIENDO VOLCADURA INMINENTE:

$\delta = \delta_{cr} = 0.5 \text{ m}$

POR ② Y ③:

$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}W\right) + \frac{9}{10}W = 3Q_{máx}$

$\frac{15}{30}W = Q_{máx} \Rightarrow Q_{máx} = \frac{1}{2}W \; . . . ⓘⓘ$

AL COMPARAR (i) Y (ii) SE CONCLUYE QUE $Q_{MÁX} = \frac{34}{75} W \approx 0.453W = 13.6N$

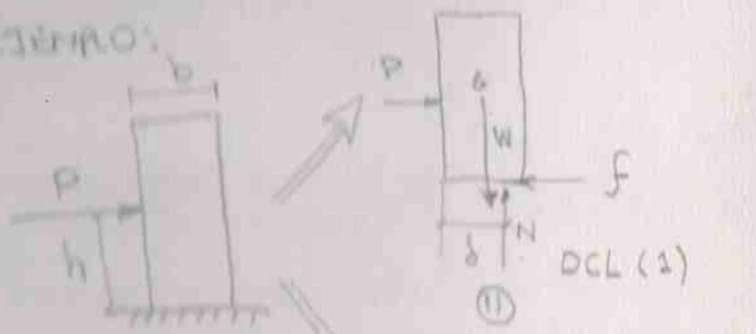
OTRA FROMA DE RESOLVER EL PROBLEMA ES: AL ASUMIR (i), VERIFICAR QUE ES CIERTA LA HIPÓTESIS MEDIANTE CÁLCULO DE δ Y COMPAR CON δ_{CR}. O, DE FORMA ALTERNATIVA, ASUMIR (ii) Y VERIFICARLA A TRAVÉS DE CÁLCULO DE f, DEBE CUMPLIRSE QUE $f < \mu_s N$ PARA QUE (ii) SEA VÁLIDA.

NOTE QUE ESTA OTRA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA, PUEDE REQUERIR MAS CÁLCULO, DEPENDIENDO SI LA HIPÓTESIS ASUMIDA EN PRIMER LUGAR ES LA CORRECTA.

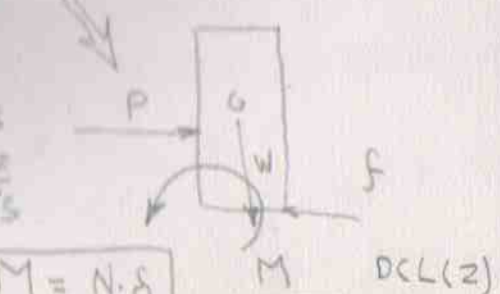
- RESUELVA EL PROBLEMA ANTERIOR SI SE REQUIERE DETERMINAR EL <u>MÍNIMO</u> VALOR DE Q.
  SUGERENCIA: OBSERVE QUE EN ESTE CASO LA TENDENCIA AL MOVIMIENTO ES CONTRARIA AL CASO DE $Q_{MÁX}$, LO CUAL AFECTA EL SENTIDO DE LA FUERZA DE ROCE.

OBSERVACIÓN: EN PROBLEMAS DONDE SE CONTEMPLE LA POSIBILIDAD DE VOLCADURA LAS REACCIONES DEL VÍNCULO (RUGOSO) SON EQUIVALENTES A UNA $\bar{F}$ (FUERZA DE ROCE) Y UN $\bar{M}$ (MOMENTO) ESTE MOMENTO ES DEBIDO A LA NORMAL, O DICHO DE OTRA FORMA: EL MOMENTO SE HALLA PLANTEANDO EQUIVALENCIA ESTÁTICA

EJEMPLO:



AMBOS DCL SON EQUIVALENTES, CUALQUIERA DE LOS DOS PUEDE USARSE PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO.



$\boxed{M = N \cdot \delta}$

$\boxed{\delta \leq b}$